

## 26. Волновое уравнение для электромагнитного поля в вакууме. Плоские монохроматические волны и их свойства. Поляризация электромагнитных волн.

Рассмотрим систему уравнений Максвелла.

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\vec{D}) = 4\pi\rho \\ \operatorname{rot}(\vec{E}) = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div}(\vec{B}) = 0 \\ \operatorname{rot}(\vec{H}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right.$$

В вакууме  $\left\{ \begin{array}{l} \rho = 0 \\ \vec{j} = 0 \\ \varepsilon = 1 \\ \mu = 1 \end{array} \right.$ , и уравнения Максвелла примут вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\vec{E}) = 0 \\ \operatorname{rot}(\vec{E}) = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div}(\vec{B}) = 0 \\ \operatorname{rot}(\vec{B}) = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

Возьмем ротор от второго уравнения системы и получим:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{E})) = \operatorname{rot}\left(-\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot}(\vec{B}).$$

Подставим сюда  $\operatorname{rot}(\vec{B})$  из четвертого уравнения системы и получим

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{E})) = -\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Это с одной стороны, а с другой стороны ротор ротора любого векторного поля можно преобразовать следующим образом:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{E})) = [\vec{\nabla}, [\vec{\nabla}, \vec{E}]] = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}, \vec{E}) - \vec{E}(\vec{\nabla}, \vec{\nabla}).$$

Заметим, что в вакууме  $(\vec{\nabla}, \vec{E}) = \operatorname{div}(\vec{E}) = 0$ , тогда

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{E})) = -\vec{E}(\vec{\nabla}, \vec{\nabla}) = -(\vec{\nabla}, \vec{\nabla})\vec{E} = -\nabla^2 \vec{E} = -\Delta \vec{E}.$$

Подставим это выражение для  $rot(rot(\vec{E}))$  в

$$rot(rot(\vec{E})) = -\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \text{ и получим } -\Delta \vec{E} = -\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0}} \text{ — волновое уравнение для электрического поля.}$$

Аналогично, если от равенства

$$rot(\vec{B}) = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

взять ротор, то получим волновое уравнение для магнитного поля:

$$\underline{\underline{\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0}}$$

-----

Волновое уравнение, например, для электрического поля  $\vec{E}$  имеет комплексное решение в виде плоских монохроматических волн:

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = \varepsilon_0 \cdot \vec{e}_p \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_0)}$$

Вещественная часть этого выражения — это вещественная плоская монохроматическая волна.

То, что это выражение является решением волнового уравнения, можно проверить путем его непосредственной подстановки в волновое уравнение.

И действительно. Чтобы проверить решение подстановкой нужно вычислить вторые производные от решения по времени и по каждой декартовой координате.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(t, \vec{r}) &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \varepsilon_0 \cdot \vec{e}_p \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_0)} \right) = \varepsilon_0 \cdot \vec{e}_p \cdot \frac{\partial}{\partial t} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_0)} = \\ &= \varepsilon_0 \cdot \vec{e}_p \cdot (-i\omega) \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_0)} = -i\omega \cdot \vec{E}(t, \vec{r}) \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

Для комплексной плоской волны любой природы:

$$\underline{\underline{\frac{\partial}{\partial t} = -i\omega}}$$

Тогда

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}(t, \vec{r}) = -\omega^2 \vec{E}(t, \vec{r})$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \vec{E}(t, \vec{r}) = \varepsilon_0 \cdot \vec{e}_p \cdot \frac{\partial}{\partial x} e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \varphi_0)} = ik_x \cdot \vec{E}(t, \vec{r}) \quad \Rightarrow$$

Для комплексной плоской волны любой природы:

$$\frac{\partial}{\partial x} = ik_x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = -k_x^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta = -k^2$$

При подстановке в волновое уравнение и сокращении на  $\vec{E}(t, \vec{r})$  получим

$$-k^2 - \frac{1}{c^2}(-\omega^2) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$k = \frac{\omega}{c}.$$

При этом соотношении выражение для плоской волны является решением волнового уравнения.

-----

Обсудим величины, входящие в выражение для плоской волны:

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = \varepsilon_0 \cdot \vec{e}_p \cdot e^{i(\vec{k}, \vec{r} - \omega t + \varphi_0)}.$$

Здесь  $\varepsilon_0$  — вещественная амплитуда плоской волны,

$\vec{e}_p$  — единичный вектор поляризации световой волны,

$\vec{k}$  — волновой вектор,

$\omega$  — циклическая частота монохроматической волны,

$\varphi_0$  — начальная фаза волны.

-----

Обсудим свойства плоской монохроматической волны.

Волна плоская в том смысле, что поверхность равных фаз — плоскость. И действительно, направим ось  $z$  вдоль волнового вектора  $\vec{k}$ .  $k_x = k_y = 0$ . Тогда

$$(\vec{k}, \vec{r}) = k_x x + k_y y + k_z z = k_z z = kz.$$

$\vec{k}, \vec{r} - \omega t + \varphi_0$  — фаза волны, тогда

$\vec{k}, \vec{r} - \omega t + \varphi_0 = const$  — уравнение постоянной фазы или уравнение поверхности равных фаз или фазовой поверхности. В нашем случае

$$kz - \omega t + \varphi_0 = const$$

В каждый момент времени  $t$  это уравнение  $z = const$  — уравнение плоскости перпендикулярной оси  $z$ .

Уравнение поверхности равных фаз — плоскость, следовательно, волна плоская.

Найдем фазовую скорость этой волны — скорость движения поверхности равных фаз. Продифференцируем по времени уравнение поверхности равных фаз:

$$kz - \omega t + \varphi_0 = const \left| \frac{d \cdot}{dt} \right. \quad \Rightarrow$$

$$k \frac{dz}{dt} - \omega = 0 \quad \Rightarrow \quad V = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} \quad \Rightarrow$$

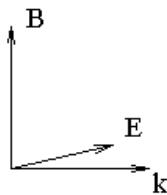
$$V = \frac{\omega}{k} = c \text{ — фазовая скорость волны.}$$

-----

Для комплексной плоской волны любой природы  $\frac{\partial}{\partial t} = -i\omega$  и  $\frac{\partial}{\partial x} = ik_x$ , откуда  $\vec{\nabla} = i\vec{k}$ . Подставим производные в таком виде в уравнения Максвелла и получим:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\vec{E}) = 0 \\ \operatorname{rot}(\vec{E}) = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div}(\vec{B}) = 0 \\ \operatorname{rot}(\vec{B}) = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\vec{\nabla}, \vec{E}) = 0 \\ [\vec{\nabla}, \vec{E}] = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ (\vec{\nabla}, \vec{B}) = 0 \\ [\vec{\nabla}, \vec{B}] = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (i\vec{k}, \vec{E}) = 0 \\ [i\vec{k}, \vec{E}] = -\frac{1}{c} \cdot (-i\omega \vec{B}) \\ (i\vec{k}, \vec{B}) = 0 \\ [i\vec{k}, \vec{B}] = \frac{1}{c} \cdot (-i\omega \vec{E}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\vec{k}, \vec{E}) = 0 \\ [\vec{k}, \vec{E}] = \frac{\omega}{c} \vec{B} \\ (\vec{k}, \vec{B}) = 0 \\ [\vec{k}, \vec{B}] = -\frac{\omega}{c} \vec{E} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{E} \perp \vec{k} \\ \vec{B} \perp \vec{E} \\ \vec{B} \perp \vec{k} \\ \vec{E} \perp \vec{k} \end{cases} \Rightarrow$$

Векторы  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{k}$  образуют правую тройку взаимно ортогональных векторов.



Векторы  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{k}$  взаимно ортогональны, тогда

$$[\vec{k}, \vec{E}] = \frac{\omega}{c} \vec{B} \quad \Rightarrow \quad kE = \frac{\omega}{c} B,$$

но  $k = \frac{\omega}{c}$ , тогда

$$\underline{E = B}$$

для бегущей световой волны в каждый момент времени и в каждой точке пространства.

-----

Поляризация.

Поляризация световой волны определяется значением единичного вектора поляризации  $\vec{e}_p$  в выражении комплексной плоской световой волны

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = \varepsilon_0 \cdot \vec{e}_p \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_0)}.$$

В каждый момент времени и в каждой точке пространства

$$\vec{E} \perp \vec{k} \quad \Rightarrow \quad \vec{e}_p \perp \vec{k}.$$

Пусть волновой вектор  $\vec{k}$  направлен вдоль оси z. Тогда  $E_z = 0$ , и вектор  $\vec{E}$  имеет только проекции  $E_x$  и  $E_y$ .

Пусть, кроме того,  $E_x = 0$ . Тогда вектор  $\vec{E}$  имеет составляющую только вдоль единичного  $\vec{e}_y$  вдоль оси y.

Следовательно,  $\vec{e}_p \parallel \vec{e}_y$ . Световая волна поляризована вдоль оси y. Это так называемая линейно поляризованная волна или волна с плоской поляризацией.

Кроме линейной поляризации бывает круговая или циркулярная поляризация света.

Для левой круговой поляризации в одной пространственной точке вещественная напряженность светового поля имеет вид:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) \\ \varepsilon_y = \varepsilon_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) = \varepsilon_0 \cdot \cos\left(\omega \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow$$

Круговая поляризация — это сумма двух линейных поляризаций со сдвигом фаз  $\frac{\pi}{2}$ .

$$\begin{cases} \vec{e}_+ \equiv \frac{\vec{e}_x + i\vec{e}_y}{\sqrt{2}} \\ \vec{e}_- \equiv \frac{\vec{e}_x - i\vec{e}_y}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \text{— единичные векторы левой и правой круговых}$$

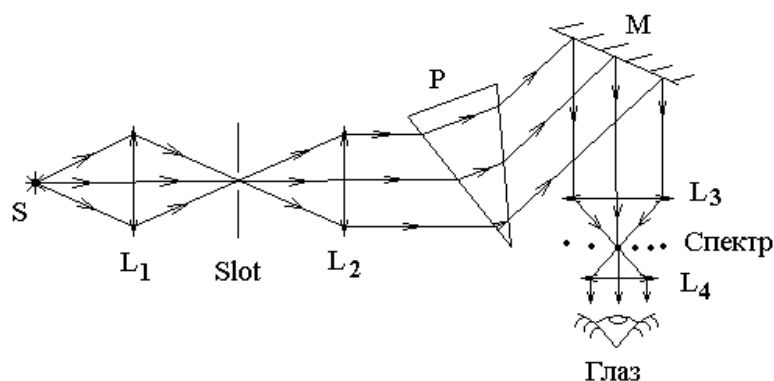
поляризаций света.

Если сложить две линейные поляризации с произвольным фазовым сдвигом, а не со сдвигом  $\frac{\pi}{2}$ , как для круговой поляризации, то в результате будет свет с эллиптической поляризацией.

### 30. Оптические спектральные приборы (призменные, дифракционные, интерференционные). Разрешающая способность и дисперсия.

Призменный спектрометр.

Призменный спектрометр освещается источником света  $S$ , свет которого собирается на входную щель  $Slot$  спектрометра с помощью конденсорной линзы  $L_1$ . В простейшем варианте призменный спектрометр состоит из следующих расположенных по ходу луча элементов: входная щель спектрометра, коллиматорная линза, призма, зеркало, объектив, репер, окуляр.



Положение конденсорной линзы  $L_1$  выбирают так, чтобы она собирала свет источника  $S$  (давала изображение источника) на входную щель  $Slot$  спектрометра. Положение источника  $S$  выбирают так, чтобы свет, прошедший через входную щель спектрометра, точно заполнил всю коллиматорную линзу  $L_2$ . Положение коллиматорной линзы  $L_2$  выбирают так, чтобы щель спектрометра была в ее фокальной плоскости. Тогда после коллиматорной линзы идет параллельный пучок лучей (от каждой точки входной щели). Ориентацию призмы  $P$  выбирают так, чтобы параллельный пучок внутри призмы шел примерно параллельно одной из ее граней. Показатель преломления призмы зависит от длины волны, поэтому свет с разными частотами идет внутри призмы в виде параллельных пучков в несколько различных направлениях. Зеркало  $M$  поворачивает параллельный пучок лучей той или иной частоты в направлении объектива  $L_3$ . В фокальной плоскости объектива  $L_3$  получают цветные изображения входной щели спектрометра или спектр источника света. Поворотом зеркала  $M$  можно сдвигать спектр относительно репера, расположенного в фокусе объектива. Репер расположен вдоль линий спектра и перпендикулярен плоскости рисунка. Окуляр  $L_4$  расположен так, чтобы в нем резко был виден репер. Перемещением окуляра вместе с репером добиваются того, чтобы спектр и репер были в одной плоскости. При этом глаз, аккомодированный на бесконечность, будет резко видеть спектр и репер.

Поворот зеркала связан с поворотом барабана с делениями, по которому можно отсчитывать положение каждой линии спектра при ее совпадении с репером.

При уменьшении ширины входной щели уменьшается и ширина линий спектра. Дифракция света на коллиматорной линзе и объективе, как на круглых отверстиях не позволяет получить бесконечно узкие линии спектра и ограничивает спектральное разрешение прибора.

Ширина входной щели, при которой линии спектра перестают сужаться, называется нормальной шириной щели.

-----

Вместо призмы спектрометр может содержать дифракционную решетку.

Дифракционная решетка может работать как в отраженном свете, так и в прошедшем свете.

Рассмотрим решетку, работающую на пропускание. Такая решетка состоит из чередующихся прозрачных и непрозрачных полосок.

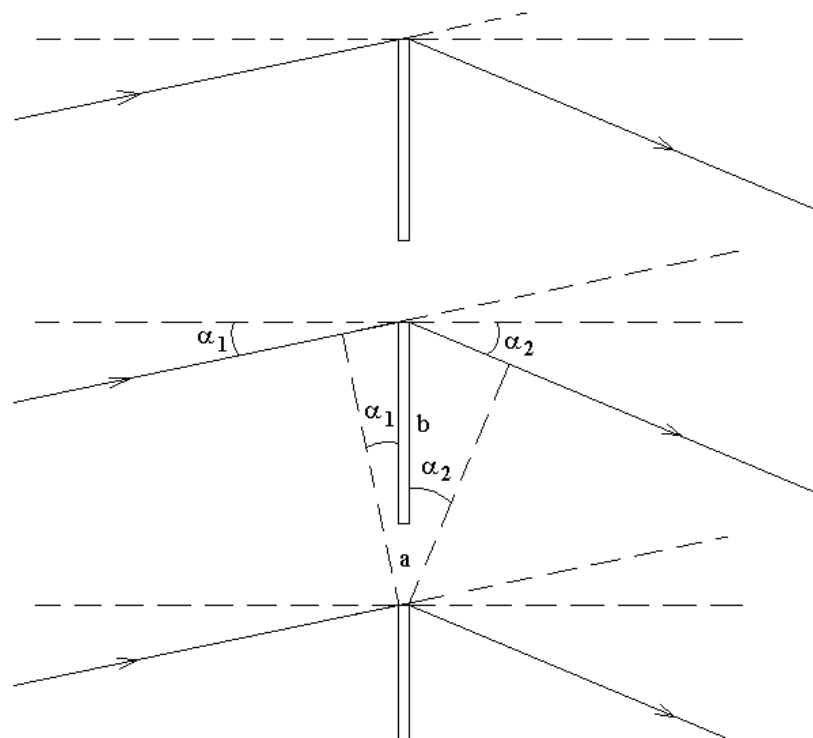
Пусть  $a$  — ширина прозрачной полоски,  $b$  — ширина непрозрачной полоски. Тогда величину  $a + b \equiv d$  — называют шагом дифракционной решетки или шириной штриха решетки.

Будем рассматривать только дифракцию Фраунгофера, когда дифракционная картина локализована на бесконечности. Будем рассматривать возможные направления падающей световой волны только перпендикулярные направлению штриха решетки.

Направление главного дифракционного максимума решетки — это направление, в котором свет от разных штрихов приходит в одинаковой фазе.

Если свет приходит в одинаковой фазе, то разность хода кратна длине волны.

$\Delta = m\lambda$ , где  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  — порядок дифракции.



Из рисунка видно, что разность хода лучей, проходящих через два соседних штриха, равна следующей величине

$$\Delta = d \cdot (\sin(\alpha_1) + \sin(\alpha_2)), \text{ где } d \text{ — шаг решетки,}$$

$\alpha_1$  — угол падения света на дифракционную решетку,

$\alpha_2$  — угол дифракции.

Положительные направления для углов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  выбраны так, чтобы поворот луча составлял угол  $(\alpha_1 + \alpha_2)$ .

Для главного дифракционного максимума  $\Delta = m\lambda$  и, следовательно,

$$d \cdot (\sin(\alpha_1) + \sin(\alpha_2)) = m\lambda.$$

Это основное уравнение дифракционной решетки. Его можно рассматривать, как уравнение для определения угла дифракции света  $\alpha_2$  при заданных остальных параметрах.

Для каждой длины волны света  $\lambda$  основное уравнение дифракционной решетки задает свое направление дифракции  $\alpha_2$ .

Дифракционную картину, локализованную на бесконечности, обычно наблюдают в фокальной плоскости линзы. Как и для дифракции на одной щели, в данном вопросе мы считаем, что в направлении перпендикулярном рисунку ни одна физическая величина не изменяется. Тогда в фокальной плоскости линзы свет одной длины волны соберется в свою линию перпендикулярную плоскости рисунка. Эти линии образуют спектр света  $I_\omega$  или спектральную плотность интенсивности света.



Спектр света, полученный с помощью дифракционной решетки, может быть осложнен наложением друг на друга спектров разных порядков дифракции.

-----

Разрешающая способность спектрального прибора — это разница в длинах волн  $\delta\lambda$  (или частотах  $\delta\nu$ ) двух близких спектральных линий, когда изображения этих линий в спектральном приборе почти сливаются в одну линию (находятся на пределе разрешения).

Разрешающая способность равна отношению углового разрешения к угловой дисперсии:  $\delta\lambda = \delta\alpha / \frac{d\alpha}{d\lambda}$ .

Угловая дисперсия  $\frac{d\alpha}{d\lambda}$  — это производная зависимости угла поворота света призмой или дифракционной решеткой от длины волны света  $\alpha(\lambda)$ .

Угловое разрешение  $\delta\alpha$  — это угловая ширина излучения на выходе призмы или дифракционной решетки, если на входе плоская монохроматическая световая волна. Угловая ширина определяется дифракцией на призме, как на одной щели, или на всей дифракционной решетке, как на одной щели.

$\delta\alpha = \frac{\lambda}{D}$ , где  $D$  — ширина параллельного пучка лучей на выходе призмы или дифракционной решетки. Так для дифракционной решетки  $D = D_0 \cos(\alpha)$ , где  $D_0$  — ширина решетки,  $\alpha$  — угол дифракции (угол между нормалью к плоскости решетки и направлением лучей на выходе из решетки); и  $\delta\alpha = \frac{\lambda}{D_0 \cos(\alpha)} = \frac{\lambda}{Nd \cdot \cos(\alpha)}$ , где  $N$  — число штрихов решетки,  $d$  — шаг решетки или расстояние между центрами соседних штрихов решетки.

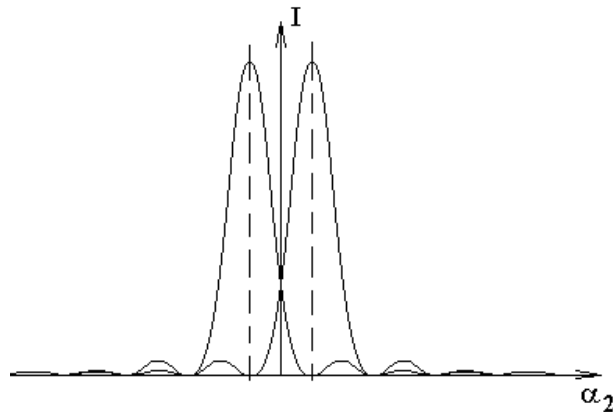
Подробнее рассмотрим разрешающую способность дифракционной решетки.

Пусть в спектре света, падающего на решетку, есть две близкие спектральные линии. В каких случаях дифракционная решетка позволяет определить, что линии две, а в каких не позволяет?

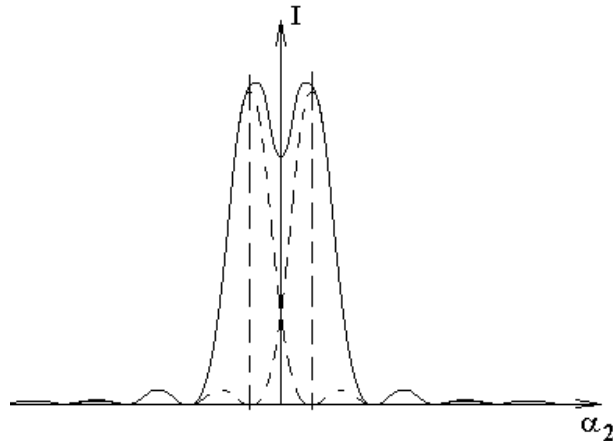
По критерию Рэля спектральные линии находятся на пороге разрешения, если главный дифракционный максимум одной спектральной линии совпадает с нулем интенсивности другой.

Имеется в виду ноль интенсивности соседний с главным дифракционным максимумом, и подразумевается, что интенсивности двух спектральных линий равны.

Рассмотрим два графика зависимости интенсивности света от угла дифракции  $\alpha_2$  для каждой из двух спектральных линий.



Если спектральные линии близки, то нет возможности различить, где свет одной линии, а где — другой. Регистрируется только суммарная интенсивность двух спектральных линий. На пороге разрешения по критерию Рэля контур суммарной интенсивности имеет в центре примерно 20%-ый провал.



Провал суммарного контура интенсивности в 20% — второе определение критерия Рэля для предела спектрального разрешения.

Эти два определения критерия Рэля для разрешающей способности оптических приборов справедливы не только для дифракционных решеток, но и для других спектральных приборов. Если зависимость интенсивности после максимума не опускается до нуля, то пользуются вторым определением критерия Рэля для разрешающей способности оптического прибора.

Рассмотрим основное равенство дифракционной решетки

$$d \cdot (\sin(\alpha_1) + \sin(\alpha_2)) = m\lambda, \text{ где } m \text{ — целое число — порядок дифракции,}$$

$d$  — шаг решетки или расстояние между центрами соседних штрихов решетки,  $\alpha_1$  — угол падения света на решетку (угол между падающим лучом и нормалью к плоскости решетки).

Продифференцируем это равенство, считая, что угол дифракции  $\alpha_2$  — функция длины волны  $\lambda$ , и получим

$d \cdot \cos(\alpha_2) \cdot \delta\alpha_2 = m \cdot \delta\lambda$ , где  $\delta\alpha_2$  и  $\delta\lambda$  — дифференциалы.

Подставим в получившееся равенство выражение для угловой ширины главного дифракционного максимума  $\delta\alpha_2 = \frac{\lambda}{Nd \cdot \cos(\alpha_2)}$  дифракционной решетки и получим

$$d \cdot \cos(\alpha_2) \cdot \frac{\lambda}{Nd \cdot \cos(\alpha_2)} = m \cdot \delta\lambda.$$

Отсюда можно выразить отношение  $\frac{\delta\lambda}{\lambda}$ :

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{mN}.$$

Этому изменению  $\delta\lambda$  длины волны  $\lambda$  соответствует такое изменение угла дифракции  $\alpha_2$ , которое для одной длины волны соответствует изменению интенсивности дифрагированной волны от главного дифракционного максимума до ближайшего нуля. По критерию Рэлея это изменение длины волны равно спектральному разрешению решетки.

В результате получаем, что относительное спектральное разрешение дифракционной решетки

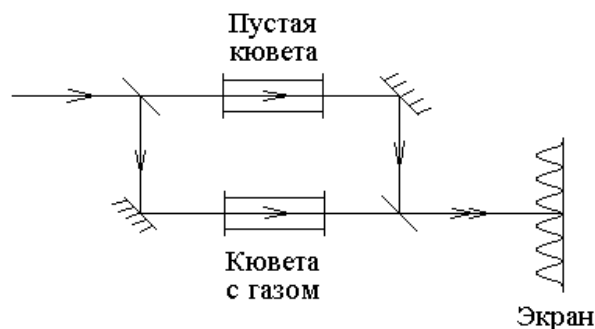
$$\frac{\delta\nu}{\nu} = \frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{mN},$$

где  $m$  — порядок дифракции,  $N$  — общее число штрихов решетки.

-----

Дисперсия света — это зависимость показателя преломления среды от частоты света. Эту зависимость удобно исследовать с помощью спектрального прибора — интерферометра.

Рассмотрим оптическую схему применения интерферометра Рождественского.



При неточной юстировке зеркал интерферометра на экране наблюдаются интерференционные полосы с шириной  $d = \frac{\lambda}{\alpha}$ , где  $\alpha$  — угол между интерферирующими лучами на экране.

В одну из кювет интерферометра напускают исследуемый газ. По мере изменения давления газа в кювете интерференционные полосы сдвигаются по экрану. Полосы сдвигаются на ширину одной полосы при изменении оптической разности хода интерферирующих лучей на  $\lambda$ .

$$m\lambda = l \cdot (n - 1)$$

Здесь  $m$  — число полос, на которое сдвинулась интерференционная картина;  $\lambda$  — длина волны света;  $l$  — геометрическая длина каждой кюветы;  $n$  — показатель преломления исследуемой среды.

Уравнение  $m\lambda = l \cdot (n - 1)$  позволяет исследовать зависимость показателя преломления среды  $n$  от длины волны света  $\lambda$  при разных давлениях газа.

## 27. Распространение света в веществе: дисперсия, фазовая и групповая скорости, комплексный показатель преломления.

Начнем с комплексного показателя преломления среды.

Рассмотрим систему уравнений Максвелла.

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\vec{D}) = 4\pi\rho \\ \operatorname{rot}(\vec{E}) = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div}(\vec{B}) = 0 \\ \operatorname{rot}(\vec{H}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right.$$

Возьмем ротор от второго уравнения.

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{E})) = \operatorname{rot}\left(-\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot}(\vec{B}) = -\frac{\mu}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot}(\vec{H}) = -\frac{\mu}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)$$

Пусть в рассматриваемом объеме нет токов проводимости  $\vec{j} = 0$ , тогда

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{E})) = -\frac{\mu}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2}.$$

С другой стороны

$$\text{rot}(\text{rot}(\vec{E})) = [\vec{\nabla}, [\vec{\nabla}, \vec{E}]].$$

Разложим правую часть по правилу "бац минус цап" и получим

$$\text{rot}(\text{rot}(\vec{E})) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}, \vec{E}) - \vec{E}(\vec{\nabla}, \vec{\nabla}) = \frac{1}{\varepsilon} \vec{\nabla}(\vec{\nabla}, \vec{D}) - (\vec{\nabla}, \vec{\nabla})\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon} \vec{\nabla}(\text{div}(\vec{D})) - \nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon} \vec{\nabla}(4\pi\rho) - \Delta \vec{E}$$

Пусть в рассматриваемом объеме нет свободных зарядов  $\rho = 0$ , тогда

$$\text{rot}(\text{rot}(\vec{E})) = -\Delta \vec{E}.$$

Приравняем друг другу два выражения для  $\text{rot}(\text{rot}(\vec{E}))$ :

$$\begin{cases} \text{rot}(\text{rot}(\vec{E})) = -\frac{\mu}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} \\ \text{rot}(\text{rot}(\vec{E})) = -\Delta \vec{E} \end{cases} \Rightarrow \Delta \vec{E} - \frac{\mu}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} = 0.$$

$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}$ , где  $\varepsilon$  — комплексная диэлектрическая проницаемость среды. То, что проницаемость — комплексная величина, следует из того, что наведенные светом дипольные моменты молекул  $\vec{p}$  раскачиваются на оптической частоте со сдвигом фазы относительно напряженности светового поля  $\vec{E}$ . В таком случае сдвинута по фазе относительно поля  $\vec{E}$  комплексная поляризация среды  $\vec{P} = n \cdot \langle \vec{p} \rangle$  и комплексный вектор электрической индукции или электрического смещения  $\vec{D} \equiv \vec{E} + 4\pi \cdot \vec{P}$ .

Тогда

$$\begin{cases} \varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon'' \\ \Delta \vec{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \end{cases}.$$

Будем искать решение для комплексного светового поля  $\vec{E}$  в виде монохроматической волны  $\vec{E}(t, \vec{r}) = \vec{E}_0(\vec{r}) \cdot e^{-i\omega t}$  на одной частоте  $\omega$ , где  $\vec{E}_0$  — комплексная амплитуда светового поля разная в разных точках пространства  $\vec{r}$ .

Подставим выражение  $\vec{E}(t, \vec{r}) = \vec{E}_0(\vec{r}) \cdot e^{-i\omega t}$  в волновое уравнение

$$\Delta \vec{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0.$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(t, \vec{r}) = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E}_0(\vec{r}) \cdot e^{-i\omega t}) = \vec{E}_0(\vec{r}) \cdot \frac{\partial}{\partial t} e^{-i\omega t} = -i\omega \cdot \vec{E}_0(\vec{r}) \cdot e^{-i\omega t} = -i\omega \cdot \vec{E}(t, \vec{r})$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}(t, \vec{r}) = -\omega^2 \cdot \vec{E}(t, \vec{r}).$$

Подставим вторую производную по времени в волновое уравнение  $\Delta \vec{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$  и, после сокращения на  $e^{-i\alpha t}$ , получим уравнение Гельмгольца для комплексной амплитуды светового поля  $\vec{E}_0(\vec{r})$ :

$$\Delta \vec{E}_0(\vec{r}) + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon\mu \cdot \vec{E}_0(\vec{r}) = 0.$$

Введем обозначение

$$\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon\mu \equiv k^2, \text{ где}$$

$k = k' + ik''$  — комплексное волновое число.

Уравнение Гельмгольца примет традиционный вид  $\Delta \vec{E}_0(\vec{r}) + k^2 \vec{E}_0(\vec{r}) = 0$ .

Определим комплексный показатель преломления  $n = n' + in''$  равенством:

$$k = \frac{\omega}{c} n.$$

Тогда с учетом соотношения  $\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon\mu \equiv k^2$  получим, что

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu}, \text{ где } \varepsilon \text{ и } \mu \text{ — комплексные величины.}$$

Для теоретического расчета комплексного показателя преломления среды нужна модель реакции молекулы на световое поле  $\vec{E}$ , например, модель атома Томсона. Эта модель должна позволять рассчитать величину дипольного момента молекулы  $\vec{p}$  по заданной величине светового поля  $\vec{E}$ . Далее комплексный показатель преломления рассчитывается по логической цепочке:

$$\vec{E} \rightarrow \vec{p} \rightarrow \vec{P} \rightarrow \vec{D} \rightarrow \varepsilon \rightarrow n.$$

Каждый шаг этой цепочки, кроме первого шага, был рассмотрен выше.

-----  
Рассмотрим влияние комплексного показателя преломления среды на амплитуду и фазу световой волны, проходящей через среду.

Начнем рассмотрение через комплексное волновое число  $k = \frac{\omega}{c} n$ .

Рассмотрим плоскую световую волну, распространяющуюся вдоль оси z.

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = \vec{E}_0(\vec{r}) \cdot e^{-i\alpha t} = \vec{E}_{00} \cdot e^{i(\vec{k}, \vec{r})} \cdot e^{-i\alpha t} = \vec{E}_{00} \cdot e^{i(\vec{k}, \vec{r} - \alpha t)} = \vec{E}_{00} \cdot e^{i(kz - \alpha t)} \quad \Rightarrow$$

$$\vec{E}_0(\vec{r}) = \vec{E}_{00} \cdot e^{i(\vec{k}, \vec{r})}$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что и в случае комплексного волнового числа  $k$   $\vec{E}_0(\vec{r})$  является решением уравнения Гельмгольца  $\Delta \vec{E}_0(\vec{r}) + k^2 \vec{E}_0(\vec{r}) = 0$  для комплексной амплитуды светового поля.

Подставим в плоскую волну  $k = k' + ik''$  и получим

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = \vec{E}_{00} \cdot e^{i(kz - \omega t)} = \vec{E}_{00} \cdot e^{i(k'z - \omega t)} \cdot e^{-k''z}$$

Здесь  $\vec{E}_{00} \cdot e^{-k''z}$  — амплитуда, убывающая в направлении распространения света.

Квадрат амплитуды пропорционален интенсивности света  $I$ :

$$I \sim \left| \vec{E}_{00} \cdot e^{-k''z} \right|^2 \sim e^{-2k''z} \quad \Rightarrow \quad I = I_0 \cdot e^{-2k''z}.$$

Сравнивая это равенство с определением коэффициента поглощения  $\aleph$   $I = I_0 \cdot e^{-\aleph z}$ , получаем  $\aleph = 2k''$ , а с учетом  $k = \frac{\omega}{c}n$ ,

$$\aleph = 2 \frac{\omega}{c} n'' \quad \text{— мнимая часть } n'' \text{ комплексного показателя преломления } n$$

отвечает за поглощение света средой, где  $\aleph$  — коэффициент поглощения света  $I = I_0 \cdot e^{-\aleph z}$ .

Вернемся к рассмотрению выражения для плоской световой волны  $\vec{E}(t, \vec{r}) = \vec{E}_{00} \cdot e^{i(k'z - \omega t)} \cdot e^{-k''z}$ . Здесь  $(k'z - \omega t)$  — фаза световой волны. Тогда

$k'z - \omega t = const$  — уравнение поверхности равных фаз. Дифференцируя это уравнение по времени, получим фазовую скорость света  $V_{ph} = \frac{dz}{dt}$ :

$$k' \frac{dz}{dt} - \omega = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{ph} = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k'} = \frac{\omega}{\frac{\omega}{c} n'} = \frac{c}{n'} \quad \Rightarrow$$

$$V_{ph} = \frac{c}{n'} \quad \text{— вещественная часть } n' \text{ комплексного показателя преломления}$$

$n$  отвечает за фазовую скорость света.

То есть вещественная часть комплексного показателя преломления среды играет роль обычного вещественного показателя преломления.

-----

Дисперсия света — это явление, которое состоит в том, что показатель преломления среды  $n'(\omega)$  зависит от частоты или длины волны света

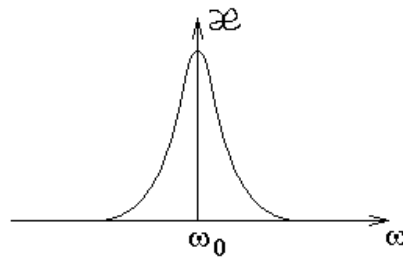
$$\lambda \nu = V_{ph} = \frac{c}{n'}.$$

Для сравнения укажем, что зависимость коэффициента поглощения света от частоты  $\aleph(\omega)$  определяет спектр поглощения света или зависимость поглощенной интенсивности света от частоты.

Если рассматривать среду в двухуровневом приближении, то есть считать, что свет взаимодействует только с одним поглощающим переходом между двумя уровнями энергии, то контур зависимости коэффициента поглощения от

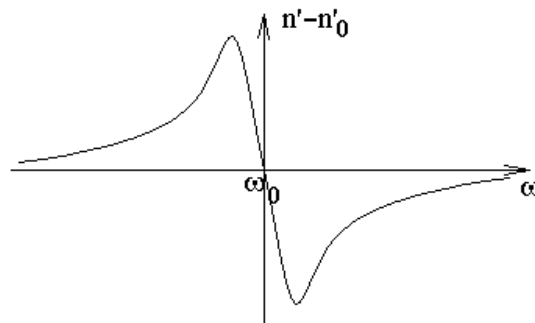
частоты света относительно узкий  $\frac{\delta\omega}{\omega} \ll 1$ . Поэтому говорят о линии поглощения. Контур линии поглощения имеет лоренцевский вид:

$$\kappa(\omega) = \kappa_0 \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\Gamma}\right)^2}$$



Здесь  $\omega_0$  — центр линии поглощения,  $2\Gamma$  — ширина линии поглощения на половине высоты.

Зависимость добавки к показателю преломления от частоты света имеет вид:



$$n' - n'_0 = -A \frac{\frac{\omega - \omega_0}{\Gamma}}{1 + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\Gamma}\right)^2}$$

Здесь  $n'_0$  — показатель преломления вдали от рассматриваемой линии поглощения.

Этот вид дисперсионного контура жестко связан с лоренцевской формой линии поглощения.

Лоренцевская форма линии поглощения может быть получена из рассмотрения модели атома Томсона, но она не определяется этой моделью. Лоренцевская форма определяется экспоненциально затухающей зависимостью вероятности обнаружить атом на возбужденном уровне энергии после возбуждения.



Дисперсионный контур добавки к показателю преломления имеет медленно спадающие крылья. В результате далеко от центра линии поглощения в области прозрачности среды поглощения нет, а добавка к показателю преломления есть.

Из рисунка видно, что показатель преломления возрастает с увеличением частоты света везде, кроме узкой области частот внутри линии поглощения. По этой причине условие  $\frac{dn}{d\omega} > 0$  называют нормальной дисперсией света, а

условие  $\frac{dn}{d\omega} < 0$  — аномальной дисперсией.

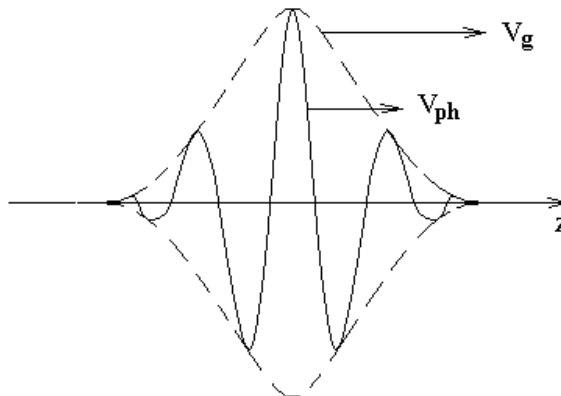
-----

Групповая и фазовая скорости света.

Рассмотрим световой импульс. Импульс имеет относительно низкочастотную огибающую и заполнение в виде относительно высокочастотной синусоиды.

Групповая скорость — скорость движения огибающей светового импульса.

Фазовая скорость — скорость движения заполнения светового импульса.



Групповая скорость отличается от фазовой скорости только при условии  $n'(\omega) \neq const$ , где  $n'$  — вещественный показатель преломления.

Групповая скорость — понятие не очень строгое. Это связано с тем, что световой импульс в процессе распространения в среде несколько деформируется, а скорость огибающей при деформации импульса теряет смысл.

$V_g = \frac{d\omega}{dk}$  — групповая скорость, что напоминает  $V_{ph} = \frac{\omega}{k}$  — фазовую скорость.

Групповая скорость — скорость передачи информации, поэтому  $V_g \leq c$ .

Тем не менее, неравенство  $\frac{d\omega}{dk} > c$  — возможно, но при этом условии световой

импульс расплывается быстрее, чем перемещается, и понятие групповой скорости теряет смысл.

## **29. Дифракция электромагнитных волн (приближения Гюйгенса-Френеля и Фраунгофера).**

До создания скалярной теории дифракции Кирхгофа Френелем была разработана своя теория дифракции.

В основе теории Френеля лежит принцип Гюйгенса-Френеля.

Согласно этому принципу каждый участок фронта световой волны является вторичным источником волн. В точке наблюдения складываются комплексные амплитуды световых волн, пришедших от различных вторичных источников.

Амплитуда света, пришедшего от вторичного источника пропорциональна площади вторичного источника, пропорциональна амплитуде светового поля в области вторичного источника и обратно-пропорциональна расстоянию от вторичного источника до точки наблюдения. Кроме того, амплитуда света в точке наблюдения должна иметь множитель  $e^{ikr}$ , который отражает запаздывание по фазе на  $kr$  фазы в точке наблюдения относительно фазы вторичного источника.

Все это соответствует более поздней и более строгой скалярной теории Кирхгофа. Можно сказать, что теория Кирхгофа является обоснованием теории Френеля. Дело в том, что все перечисленные выше свойства света, приходящего от вторичного источника в точку наблюдения, в теории Френеля были просто бездоказательной догадкой.

В теории Френеля не было коэффициента наклона, хотя Френель и догадывался, что какая-то зависимость излучения вторичного источника от направления должна быть.

Название принципа Гюйгенса-Френеля связано с тем, что до теории Френеля огибание светом препятствий объяснялось с помощью построений Гюйгенса. Согласно построениям Гюйгенса каждая точка фронта волны является вторичным источником света. Новое положение фронта световой волны через некоторый промежуток времени  $\tau$  может быть получено, как граница совокупности точек, до которых достигает свет от любой из точек старого фронта волны за рассматриваемое время  $\tau$ .

-----

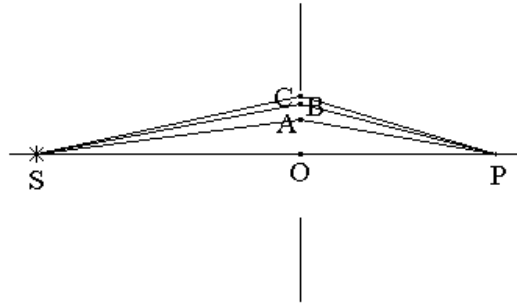
Важным элементом теории дифракции Френеля являются зоны Френеля.

Зоны Френеля полезны только при рассмотрении дифракции в задаче с осевой симметрией. На одной оси находятся источник света, круглое отверстие в непрозрачном экране и точка наблюдения.

Зоны Френеля — это кольца, на которые мысленно разбивают плоскость отверстия со вторичными источниками света. В дополнение к определению зоны Френеля требуется, чтобы разность хода лучей, идущих через внешний и внутренний край кольца зоны Френеля, была бы равна  $\frac{\lambda}{2}$ .

Радиусом зоны Френеля называют внешний радиус кольца.

Пусть  $OA, OB, OC$  — радиусы зон Френеля.



Если  $r_m$  — радиус  $m$ -ой зоны Френеля, то

$$\begin{cases} OA = r_1 \\ OB = r_2 \\ OC = r_3 \\ \vdots \end{cases}$$

По определению зоны Френеля разность хода лучей, идущих через внешний и внутренний край кольца зоны Френеля, равна  $\frac{\lambda}{2}$ . Тогда

$$\left. \begin{aligned} (SA + AP) - (SO + OP) &= \frac{\lambda}{2} \\ (SB + BP) - (SA + AP) &= \frac{\lambda}{2} \\ (SC + CP) - (SB + BP) &= \frac{\lambda}{2} \\ \vdots & \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} (SA + AP) - (SO + OP) &= 1 \frac{\lambda}{2} \\ (SB + BP) - (SO + OP) &= 2 \frac{\lambda}{2} \\ (SC + CP) - (SO + OP) &= 3 \frac{\lambda}{2} \\ \vdots & \end{aligned} \right\}$$

Пусть  $r_m = OM$  — радиус  $m$ -ой зоны Френеля. Тогда

$$(SM + MP) - (SO + OP) = m \frac{\lambda}{2}$$

Обозначим

$L_1 \equiv SO$  — расстояние от источника света до отверстия,

$L_2 \equiv OP$  — расстояние от отверстия до точки наблюдения,

$$SM = \sqrt{SO^2 + OM^2} = \sqrt{L_1^2 + r_m^2} = L_1 \sqrt{1 + \frac{r_m^2}{L_1^2}} \approx L_1 \left( 1 + \frac{r_m^2}{2L_1^2} \right) = L_1 + \frac{r_m^2}{2L_1}$$

Аналогично

$$MP \approx L_2 + \frac{r_m^2}{2L_2}$$

Подставим  $SO, OP, SM, MP$  через  $L_1, L_2, r_m$  в равенство

$$(SM + MP) - (SO + OP) = m \frac{\lambda}{2}$$

и получим

$$\left( L_1 + \frac{r_m^2}{2L_1} \right) + \left( L_2 + \frac{r_m^2}{2L_2} \right) - (L_1 + L_2) = m \frac{\lambda}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{r_m^2}{2} \cdot \left( \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) = m \frac{\lambda}{2} \quad \Rightarrow$$

$$r_m = \sqrt{m\lambda \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}} \quad \text{— внешний радиус } m\text{-ой зона Френеля.}$$

Часто рассматривают плоскую световую волну, падающую на круглое отверстие в непрозрачном экране. Тогда  $L_1 = \infty \quad \Rightarrow$

$$r_m = \sqrt{m\lambda L_2}$$

Если в формуле отсутствует расстояние  $L_1$ , то  $L_2$  можно переобозначить за  $L$ . Тогда

$$r_m = \sqrt{m\lambda L} \quad \text{— радиус } m\text{-ой зона Френеля для плоской падающей волны.}$$

-----  
Зоны Френеля имеют примерно одинаковые площади. И действительно

$$S_m = \pi r_m^2 - \pi r_{m-1}^2 = \pi \left( m\lambda \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} - (m-1)\lambda \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \right) = \pi\lambda \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}.$$

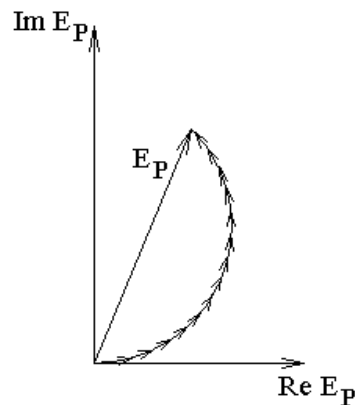
Здесь правая часть равенства не зависит от  $m$ , значит и площади зон Френеля  $S_m$  не зависят от  $m$ .

-----  
Разобьем отверстие на более мелкие кольца. Пусть кольца такие, что разность хода для двух лучей, проходящих через внешнюю и внутреннюю границы кольца, одна и та же для любого кольца. Тогда площади колец будут одинаковы. Это можно доказать, рассуждая аналогично рассмотрению зон Френеля.

Одинаковые разности хода эквивалентны одинаковым разностям фаз, так как

$$\frac{\Delta}{\lambda} = \frac{\delta\varphi}{2\pi}$$

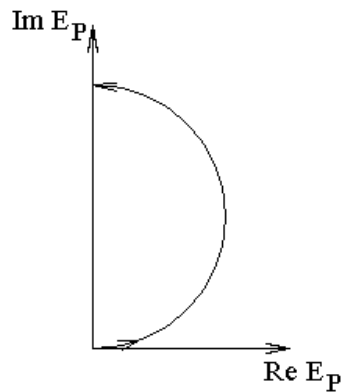
Сдвиг фазы — это поворот комплексной амплитуды на комплексной плоскости. То есть векторные вклады от разных колец будут развернуты на одинаковые углы на комплексной плоскости. Длины этих векторов будут одинаковы, так как одинаковы площади колец вторичных источников. Следовательно, эти векторы будут лежать на дуге окружности.



Суммарная комплексная амплитуда света в точке наблюдения  $P$  — хорда. В этих рассуждениях мы пренебрегли зависимостью амплитуды от расстояния  $\sim \frac{1}{r}$  и пренебрегли зависимостью коэффициента наклона от угла дифракции. Такие приближения справедливы, если радиус отверстия в экране гораздо меньше расстояния от экрана до источника света и расстояния от экрана до точки наблюдения.

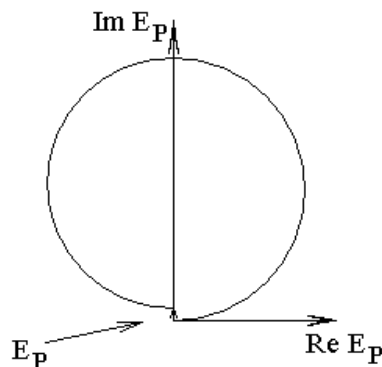
Заметим, что в электричестве комплексные напряжения и токи пропорциональны  $e^{i\omega t}$ , а в оптике напряженность электрического поля пропорциональна  $e^{-i\omega t}$ . В результате этой разницы поворот комплексной амплитуды на комплексной плоскости, например, против часовой стрелки в электричестве означает опережение по фазе, а в оптике — отставание по фазе.

Если для точки наблюдения отверстие открывает 1-ую зону Френеля, то картина сложения амплитуд имеет следующий вид:



Для внутреннего и внешнего края зоны Френеля разность хода  $\Delta = \frac{\lambda}{2}$ , что соответствует разности фаз  $\delta\varphi = \pi$  и соответствует повороту вектора на комплексной плоскости на угол  $\pi$ . Если вклад от начала первой зоны направлен вправо, то от конца первой зоны — налево. Следовательно, картина сложения амплитуд на комплексной плоскости — половина окружности.

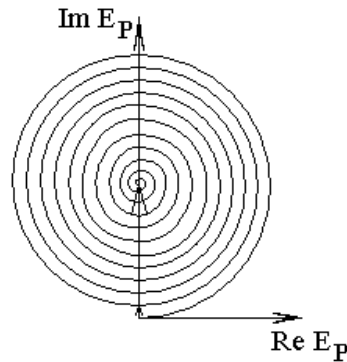
Аналогично для отверстия, которое открывает для точки наблюдения две зоны Френеля, картина сложения амплитуд — целая окружность. Суммарная амплитуда света  $E_p$  в этом случае очень мала.



Отличие амплитуды от нуля вызвано тем, что коэффициент наклона для второй зоны Френеля в среднем чуть меньше, чем для первой зоны, и расстояние от вторичных источников второй зоны до точки наблюдения чуть больше, чем для первой зоны.

Аналогично для отверстия с четным числом зон Френеля амплитуда почти нулевая, а для нечетного числа зон Френеля — максимальна.

Если отверстие открывает всю плоскость, то картина сложения амплитуд имеет вид:



При этом суммарная амплитуда  $E_0$  — вертикальный радиус окружности, а амплитуда  $E_1$  при открытой первой зоне Френеля — диаметр. Здесь  $E_0$  — амплитуда волны, падающей на экран с отверстием.

Интенсивность света пропорциональна квадрату амплитуды, следовательно,

$$I_1 = 4I_0.$$

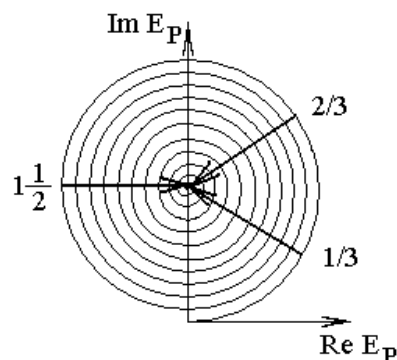
Интенсивность света при открытой первой зоне Френеля в 4 раза больше, чем интенсивность света падающего на экран.

Для четного числа открытых зон интенсивность близка к нулю, для нечетного числа — близка к  $4I_0$ .

-----

Рассмотрим точечный источник света и круглый непрозрачный диск. В центре геометрической тени диска будет светлое пятно — пятно Пуассона.

Рассмотрим картину сложения амплитуд на комплексной плоскости в трех случаях: закрыта  $\frac{1}{3}$  первой зоны Френеля, закрыты  $\frac{2}{3}$  первой зоны Френеля, закрыто  $1\frac{1}{2}$  зоны Френеля.



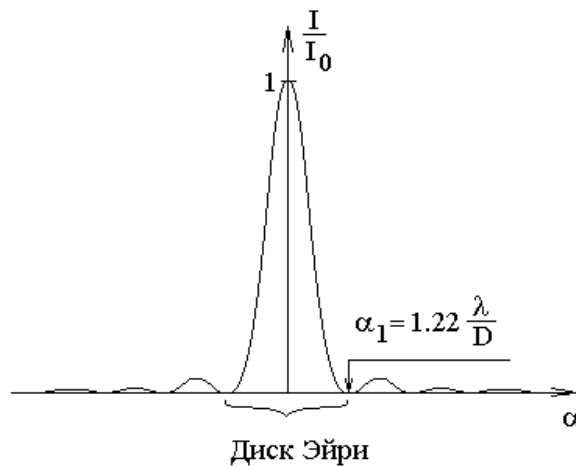
Как видно из рисунка комплексная амплитуда света в этих трех случаях будет иметь разную фазу (поворот вектора на комплексной плоскости) и одинаковый модуль вектора. То есть интенсивность света, пропорциональная

квадрату модуля амплитуды, будет одинаковой. Интенсивность остается одинаковой, если закрыть любое, но небольшое, число зон Френеля.

-----

Дифракция Фраунгофера на круглом отверстии.

Задача имеет осевую симметрию. Дифракционная картина должна иметь ту же симметрию — это кольца. В центре дифракционной картины находится светлый диск — диск Эйри. Угловой радиус первого темного кольца  $\alpha_1 \approx 1.22 \frac{\lambda}{D}$ , где  $D$  — диаметр отверстия.



Строгий расчет показывает, что зависимость интенсивности дифрагированного света от угла дифракции  $\alpha$  имеет следующий вид:

$$I(\alpha) = I_0 \left( \frac{2J_1(U)}{U} \right)^2, \text{ где}$$

$$U = kR \cdot \sin(\alpha),$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ — волновое число,}$$

$R$  — радиус отверстия,

$I_0$  — интенсивность света в направлении нулевого угла дифракции  $\alpha = 0$ ,

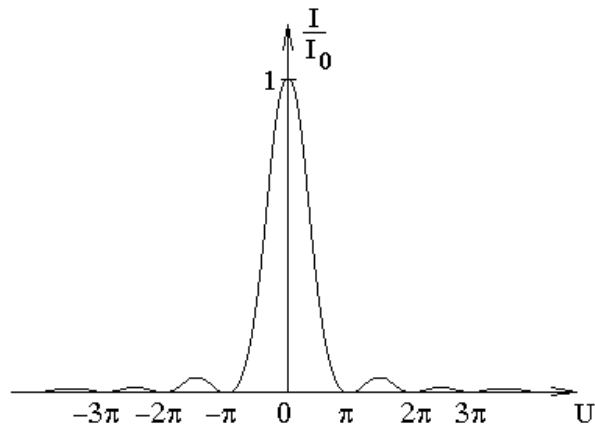
$$J_m(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(mt - z \cdot \sin(t)) \cdot dt \text{ — функция Бесселя с целочисленным}$$

значком  $m = 0, 1, 2, \dots$  Это одно из возможных определений функции Бесселя.

-----

Дифракция Фраунгофера на одной щели.





$$I(\alpha) = I_0 \cdot \left( \frac{\sin(U)}{U} \right)^2,$$

где  $I_0$  — интенсивность света в направлении нулевого угла дифракции  $\alpha = 0$ ,

$$U \equiv \frac{1}{2} kD \cdot \sin(\alpha),$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ — волновое число,}$$

$D$  — ширина щели.

## 28. Распространение света в анизотропных средах.

Рассмотрим распространение плоской монохроматической волны

$\vec{E} = \mathcal{E}_0 \cdot \vec{e}_p \cdot e^{i(\vec{k}, \vec{r} - \omega t + \varphi_0)}$  в анизотропной среде.

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(t, \vec{r}) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \mathcal{E}_0 \cdot \vec{e}_p \cdot e^{i(\vec{k}, \vec{r} - \omega t + \varphi_0)} \right) = \mathcal{E}_0 \cdot \vec{e}_p \cdot \frac{\partial}{\partial t} e^{i(\vec{k}, \vec{r} - \omega t + \varphi_0)} =$$

$$= \mathcal{E}_0 \cdot \vec{e}_p \cdot (-i\omega) \cdot e^{i(\vec{k}, \vec{r} - \omega t + \varphi_0)} = -i\omega \cdot \vec{E}(t, \vec{r}) \quad \Rightarrow$$

Для комплексной плоской волны любой природы:

$$\frac{\partial}{\partial t} = -i\omega.$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \vec{E}(t, \vec{r}) = \varepsilon_0 \cdot \vec{e}_p \cdot \frac{\partial}{\partial x} e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \varphi_0)} = ik_x \cdot \vec{E}(t, \vec{r}) \quad \Rightarrow$$

Для комплексной плоской волны любой природы:

$$\frac{\partial}{\partial x} = ik_x \quad \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla} = i\vec{k}.$$

Подставим соотношения  $\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} = -i\omega \\ \vec{\nabla} = i\vec{k} \end{cases}$  в систему уравнений Максвелла

$$\begin{cases} (\vec{\nabla}, \vec{D}) = 0 \\ [\vec{\nabla}, \vec{E}] = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ (\vec{\nabla}, \vec{B}) = 0 \\ [\vec{\nabla}, \vec{H}] = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases} \text{ для прозрачной } \begin{cases} \rho = 0 \\ \vec{j} = 0 \end{cases} \text{ анизотропной среды, для которой}$$

диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon$  — тензор второго ранга. Добавим сюда два

уравнения  $\begin{cases} \vec{S} = \frac{c}{4\pi} \cdot [\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{H}}] \\ \vec{H} = \vec{B} \end{cases}$ , где  $\vec{\mathcal{E}}$  и  $\vec{\mathcal{H}}$  — вещественные поля, и получим 6

соотношений:

$$\begin{cases} (\vec{k}, \vec{D}) = 0 \\ [\vec{k}, \vec{E}] = \frac{\omega}{c} \vec{B} \\ (\vec{k}, \vec{B}) = 0 \\ [\vec{k}, \vec{H}] = -\frac{\omega}{c} \vec{D} \\ \vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{H}}] \\ \vec{H} = \vec{B} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{k} \perp \vec{D} \\ \vec{B} \perp \vec{E} \\ \vec{B} \perp \vec{k} \\ \vec{B} \perp \vec{D} \\ \vec{S} \perp \vec{E} \\ \vec{S} \perp \vec{B} \end{cases}$$

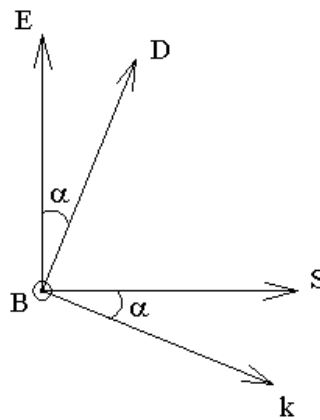
Из этих соотношений видно, что вектор  $\vec{B}$  перпендикулярен 4-м остальным векторам  $\vec{k}, \vec{D}, \vec{E}, \vec{S}$ . Эти 4-е вектора лежат в одной плоскости, перпендикулярной вектору  $\vec{B}$ .

Сгруппируем соотношения ортогональности по три:

$$\begin{cases} \vec{k} \perp \vec{D} \\ \vec{k} \perp \vec{B} \\ \vec{B} \perp \vec{D} \end{cases} \Rightarrow \text{векторы } \vec{k}, \vec{D}, \vec{B} \text{ взаимно ортогональны,}$$

$$\begin{cases} \vec{S} \perp \vec{E} \\ \vec{S} \perp \vec{B} \\ \vec{E} \perp \vec{B} \end{cases} \Rightarrow \text{векторы } \vec{S}, \vec{E}, \vec{B} \text{ взаимно ортогональны.}$$

Рассмотрим рисунок, на котором вектор  $\vec{B}$  перпендикулярен плоскости рисунка, тогда остальные 4-е вектора окажутся в плоскости рисунка:



Из  $\begin{cases} \vec{E} \perp \vec{S} \\ \vec{D} \perp \vec{k} \end{cases}$  следует, что угол между векторами  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$  равен углу между векторами  $\vec{S}$  и  $\vec{k}$ . Обозначим этот угол за  $\alpha$ :

$$\alpha \equiv (\vec{E}, \vec{D}) = (\vec{S}, \vec{k})$$

-----  
Напомним, почему в кристалле векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$  различаются по направлению.

В кристалле  $\vec{D} = \hat{\epsilon} \cdot \vec{E}$ , где  $\hat{\epsilon}$  — тензор диэлектрической проницаемости.  $\hat{\epsilon}$  — симметричный тензор второго ранга. В тензорной алгебре есть теорема о том, что симметричный тензор второго ранга поворотом системы координат можно привести к диагональному виду:

$$\vec{D} = \begin{pmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix} \cdot \vec{E}$$

Если тензор диэлектрической проницаемости диагонален, то оси координат  $x, y, z$  — совпадают с главными диэлектрическими осями кристалла по определению главных диэлектрических осей.

Умножение вектора  $\vec{E}$  слева на диагональный тензор  $\hat{\epsilon}$  означает растяжение по осям  $x, y, z$  в  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$  раз. Растяжение по осям различно, поэтому вектор произведения  $\vec{D}$  отличается по направлению от вектора  $\vec{E}$  на угол  $\alpha \equiv (\vec{E}, \vec{D})$ .

-----

Что будет, если этот поворот вектора  $\vec{D}$  относительно вектора  $\vec{E}$  выведет вектор  $\vec{D}$  из плоскости перпендикулярной вектору  $\vec{B}$ ?

Раньше мы выяснили, что в кристалле векторы  $\vec{B}$  и  $\vec{D}$  должны быть ортогональны в плоской световой волне в анизотропной среде. Если условие  $\hat{\epsilon} \cdot \vec{E} \perp \vec{B}$  не выполнено, то такое направление вектора  $\vec{E}$  невозможно в бегущей в кристалле плоской световой волне. Оказывается (без доказательства), что в этом случае, падающая на кристалл плоская световая волна распадается на две бегущие волны с разрешенными в кристалле и взаимно ортогональными направлениями поляризации, направлениями вектора  $\vec{E}$ . Для каждой из этих волн условие  $\hat{\epsilon} \cdot \vec{E} \perp \vec{B}$  будет выполнено.

Эти две волны распространяются в кристалле независимо друг от друга и несколько в различающихся направлениях. Это явление расщепления падающей на кристалл плоской волны на две волны называется двулучепреломлением, и связано с тем, показатели преломления кристалла для этих поляризаций различаются по величине.

-----

И лучевая и фазовая скорости световой волны в кристалле являются аналогами одной и той же фазовой скорости в некристаллической изотропной среде. Групповую скорость волн в кристалле мы рассматривать не будем.

Лучевая скорость  $\vec{V}_r$  в кристалле по определению показывает направление движения энергии световой волны, то есть, совпадает по направлению с

вектором Пойнтинга  $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \cdot [\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{H}}]$ .

$\vec{V}_r \uparrow \uparrow \vec{S}$ , где  $r$  — radiate — испускать.

В некристаллической изотропной среде интенсивность света или среднее значение вектора Пойнтинга связано с фазовой скоростью  $V_p$  соотношением:

$$I \equiv \langle |\vec{S}| \rangle_t = \langle w \rangle_t \cdot \frac{c}{n} = \langle w \rangle_t \cdot V_p, \quad \text{где} \quad w = \frac{(\vec{\mathcal{D}}, \vec{\mathcal{E}})}{8\pi} + \frac{(\vec{\mathcal{B}}, \vec{\mathcal{H}})}{8\pi} \quad \text{— объемная}$$

плотность энергии электромагнитного поля.

Аналогично соотношению  $\langle \vec{S} \rangle_t = \langle w \rangle_t V_p$  для изотропной среды в кристалле вводится понятие лучевой скорости  $\vec{V}_r$  через вектор Пойнтинга  $\vec{S}$  и объемную плотность энергии электромагнитного поля  $w$ :

$$\vec{S} = w \vec{V}_r$$

-----

Рассмотрим теперь фазовую скорость света в кристалле.

Фазовая скорость — скорость движения поверхности постоянной фазы.

$(\vec{k}, \vec{r} - \omega \cdot t + \varphi_0)$  — фаза любой плоской волны независимо от ее природы.

Направим ось  $z$  вдоль волнового вектора  $\vec{k} \Rightarrow \vec{k} \uparrow \uparrow \vec{e}_z \Rightarrow$

$$(\vec{k}, \vec{r}) = k_x x + k_y y + k_z z = k_z z = kz \Rightarrow$$

$kz - \omega \cdot t + \varphi_0$  — фаза волны с волновым вектором  $\vec{k}$ , направленным вдоль оси  $z$ .

Тогда  $kz - \omega \cdot t + \varphi_0 = const$  — уравнение поверхности постоянной фазы, фазовой поверхности или фронта волны.

Возьмем производную по времени от уравнения постоянной фазы, считая, что  $z$  координата фронта волны — функция времени.

Тогда

$$k \frac{dz}{dt} - \omega = 0 \Rightarrow V_p = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} \Rightarrow$$

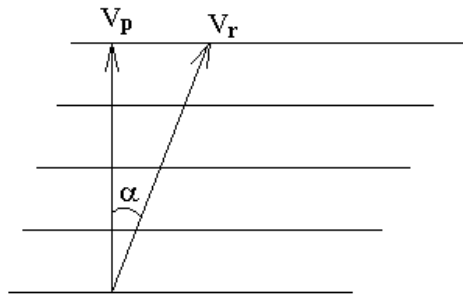
$V_p = \frac{\omega}{k}$  — фазовая скорость света в кристалле.

Из формулы  $V_p = \frac{dz}{dt}$  следует, что фазовая скорость направлена вдоль оси  $z$ , направление которой было выбрано вдоль волнового вектора  $\vec{k}$ .

-----

Максимумы световой волны содержат максимум энергии и поэтому перемещаются вместе с энергией светового поля с лучевой скоростью  $\vec{V}_r$ , как же при этом возможно, что поверхности постоянной фазы перемещаются с другой, фазовой, скоростью  $\vec{V}_p$  и в другом направлении?

Рассмотрим рисунок, показывающий перемещение максимумов световой волны вместе с энергией со скоростью  $\vec{V}_r$ :



Пусть горизонтальные линии на рисунке — это максимумы напряженности электрического поля и одновременно максимумы энергии светового поля, которые перемещаются в направлении вектора лучевой скорости  $\vec{V}_r$ . Конечная длина горизонтальных линий отображает конечную ширину пучка лучей. Из рисунка видно, что пучок лучей по мере своего распространения смещается вверх и направо. Если же считать, что поверхности равных фаз бесконечны по горизонтали и есть даже там, где нет энергии светового поля, то перемещение поверхности равных фаз вдоль самой поверхности ничего для нее не меняет. По этой причине скорость перемещения поверхности равных фаз может быть направлена только перпендикулярно самой поверхности. Эта фазовая скорость равна проекции лучевой скорости на нормаль к поверхности равных фаз:

$$V_p = V_r \cos(\alpha)$$

-----

Здесь угол  $\alpha$  — угол между векторами  $\vec{V}_p$  и  $\vec{V}_r$ , а с учетом соотношений

$$\begin{cases} \vec{V}_r \uparrow \uparrow \vec{S} \\ \vec{V}_p \uparrow \uparrow \vec{k} \end{cases}, \alpha \text{ — угол между векторами } \vec{S} \text{ и } \vec{k}, \text{ который в свою очередь равен}$$

углу между векторами  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$ .

Заметим, что рассчитать величину угла  $\alpha$  можно на основе все той же формулы:

$$\alpha = (\vec{E}, \vec{D}) \Rightarrow (\vec{D}, \vec{E}) = D \cdot E \cdot \cos(\alpha) \Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{(\vec{D}, \vec{E})}{D \cdot E}, \quad \text{где}$$

величину и направление вектора  $\vec{D}$  можно найти из равенства  $\vec{D} = \hat{\epsilon} \cdot \vec{E}$ , а направление вектора  $\vec{E}$  зависит от поляризации световой волны.

Напомним еще раз, что в некристаллической изотропной среде лучевая и фазовая скорости совпадают и называются фазовой скоростью света.

-----

Скорость света в кристалле зависит не от направления света, а от направления поляризации или вектора  $\vec{E}$  световой волны. Причина этого в следующем.

В одних направлениях вектор  $\vec{E}$  поляризует кристалл сильнее, в других — слабее. Когда кристалл сильно поляризуется на оптической частоте, диполи атомов сильнее излучают, их излучение, интерферируя с проходящей мимо световой волной, не изменяют ее амплитуды, так как мы рассматриваем только прозрачные кристаллы. Сильное излучение диполей сильнее поворачивает фазу волны и сильнее замедляет волну. То есть скорость света в кристалле зависит именно от направления вектора  $\vec{E}$ .

-----  
 Рассмотрим свет, линейно поляризованный вдоль одной из главных диэлектрических осей  $x, y, z$ . В главных осях тензор диэлектрической проницаемости имеет следующий вид:

$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix}$$

Пусть, например, вектор  $\vec{E}$  направлен вдоль оси  $z$ :

$\vec{E} \uparrow \uparrow \vec{e}_z$ , тогда

$$\vec{D} = \begin{pmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \epsilon_z E_z \end{pmatrix} = \epsilon_z \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \alpha \equiv (\vec{D}, \vec{E}) = 0$$

$$(\vec{k}, \vec{S}) = (\vec{D}, \vec{E}) = 0 \quad \Rightarrow \quad (\vec{V}_p, \vec{V}_r) = (\vec{k}, \vec{S}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{V}_p \uparrow \uparrow \vec{V}_r$$

Кроме того, из  $\begin{cases} V_p = V_r \cos(\alpha) \\ \alpha = 0 \end{cases}$  следует, что  $V_p = V_r$ , и с учетом  $\vec{V}_p \uparrow \uparrow \vec{V}_r$

получаем:

$\vec{V}_p = \vec{V}_r$  — фазовая и лучевая скорости в кристалле совпадают, если линейная поляризация (вектор  $\vec{E}$ ) направлена вдоль одной из главных диэлектрических осей кристалла.

-----  
 Для изотропной среды  $V_p = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ .

Аналогично в рассматриваемом случае поляризации света вдоль главной диэлектрической оси  $z$  можно ввести определение величин  $n_z$ :

$$V_r = V_p = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_z \mu}} \equiv \frac{c}{n_z} \quad \Rightarrow \quad n_z \equiv \sqrt{\varepsilon_z \mu}.$$

Аналогично для других главных диэлектрических осей:  $n_x \equiv \sqrt{\varepsilon_x \mu}$  и  $n_y \equiv \sqrt{\varepsilon_y \mu}$ .

Еще раз отметим, что показатели преломления  $n_x, n_y, n_z$  соответствуют свету, поляризованному вдоль осей  $x, y, z$ , а не свету направленному вдоль осей  $x, y, z$ .

Фазовая пластинка — плоскопараллельная кристаллическая пластина, у которой две главные диэлектрические оси с разными диэлектрическими проницаемостями лежат в плоскости пластины.

Выберем направление оси  $z$  перпендикулярно фазовой пластинке, и направим оси  $x$  и  $y$  вдоль главных диэлектрических осей пластинки.

Пусть на фазовую пластинку нормально падает линейно поляризованный свет.

Электромагнитные волны поперечны, поэтому электрическое поле  $\vec{E}$  падающей волны можно разложить по главным диэлектрическим осям  $x$  и  $y$ .

Каждая из двух составляющих будет иметь свою лучевую и одновременно фазовую скорость:

$$\frac{c}{n_x} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_x \mu}} \approx \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_x}} \quad \text{— скорость световой волны } E_x, \text{ поляризованной вдоль}$$

оси  $x$ ,

$$\frac{c}{n_y} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_y \mu}} \approx \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_y}} \quad \text{— скорость световой волны } E_y, \text{ поляризованной вдоль}$$

оси  $y$ .

Разная фазовая скорость приводит к появлению разности фаз на выходе из пластины для двух линейных поляризаций  $E_x$  и  $E_y$ .

Пластину называют фазовой, так как она вносит дополнительную разность фаз для двух линейных поляризаций.

Пластинки  $\frac{\lambda}{4}$  и  $\frac{\lambda}{2}$  — фазовые пластинки.

Если оптическая разность хода двух линейных поляризаций равна  $\frac{\lambda}{4}$ , то это пластинка  $\frac{\lambda}{4}$ , если  $\frac{\lambda}{2}$ , то —  $\frac{\lambda}{2}$ . Добавление к разности хода величины кратной  $\lambda$  не изменяет разности фаз волн, так как  $\lambda$  — пространственный период волн.

Пусть  $h$  — геометрическая толщина фазовой пластинки.



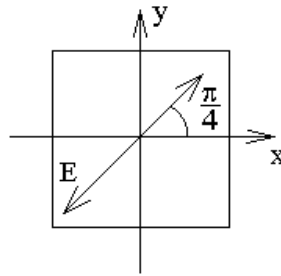
$n_1 h - n_2 h = \frac{\lambda}{4} + m\lambda$  для пластинки  $\frac{\lambda}{4}$ , где  $m$  — целое число;

$n_1 h - n_2 h = \frac{\lambda}{2} + m\lambda$  для пластинки  $\frac{\lambda}{2}$ , где  $m$  — целое число.

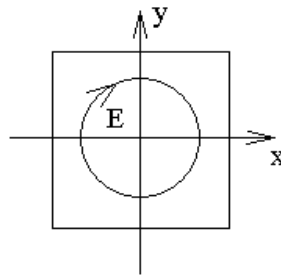
$\lambda$  — пространственный период волны,  $2\pi$  — период изменения фазы волны.

В таком случае разность хода  $\frac{\lambda}{4}$  соответствует разности фаз  $\frac{\pi}{2}$ . Сложение ортогональных колебаний с разностью фаз  $\frac{\pi}{2}$  и одинаковыми амплитудами дает вращение. Следовательно, если на пластинку  $\frac{\lambda}{4}$  падает линейно поляризованный свет, который можно разложить на две линейные поляризации с одинаковыми амплитудами вдоль главных диэлектрических осей пластины, то на выходе из пластины будет свет с круговой поляризацией.

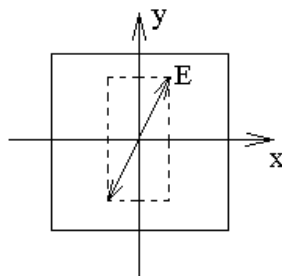
Если на входе пластинки  $\frac{\lambda}{4}$



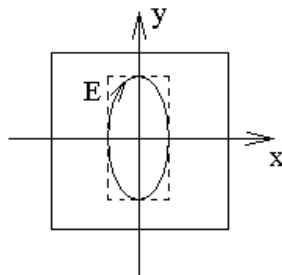
то на выходе



Если на входе пластинки  $\frac{\lambda}{4}$

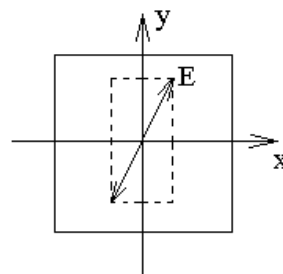


то на выходе



Если на пластинку  $\frac{\lambda}{4}$  падает свет, линейно поляризованный вдоль оси  $y$ , то на выходе из пластинки он останется линейно поляризованным вдоль  $y$ . Аналогично для света поляризованного вдоль оси  $x$ .

Для пластинки  $\frac{\lambda}{2}$ , если на входе пластинки



то на выходе

