

**Факультатив. Сравнение формул для электрического и магнитного полей.**

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$$

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M}$$

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV}$$

$$\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dV}$$

$$\vec{P} = \sum_i q_i \vec{r}_i$$

$$\vec{m} = \frac{I}{c} \vec{S}$$

$$\text{div}(\vec{D}) = 4\pi\rho$$

$$\text{rot}(\vec{H}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\text{div}(\vec{E}) = 4\pi(\rho + \rho')$$

$$\text{rot}(\vec{B}) = \frac{4\pi}{c} (\vec{j} + \vec{j}')$$

$$\text{div}(\vec{P}) = -\rho'$$

$$\text{rot}(\vec{M}) = \frac{\vec{j}'}{c}$$

$$\text{rot}(\vec{E}) = 0$$

$$\text{div}(\vec{B}) = 0$$

$$\varphi = \frac{(\vec{p}, \vec{r})}{r^3}$$

$$\vec{A} = \frac{[\vec{m}, \vec{r}]}{r^3}$$

$$\vec{E} = 3 \frac{(\vec{p}, \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}$$

$$\vec{B} = 3 \frac{(\vec{m}, \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3}$$

**Факультатив. Электрическое и магнитное поле в полости вытянутой вдоль поля и в полости сплюснутой перпендикулярно полю.**

Граничные условия позволяют найти поле в полости вытянутой вдоль поля и в полости сплюснутой перпендикулярно полю.

Если на границе полости нет свободных поверхностных зарядов и поверхностных токов проводимости  $\begin{cases} \sigma = 0 \\ \vec{i} = 0 \end{cases}$ , то граничные условия для

электрического и магнитного полей выглядят одинаково:

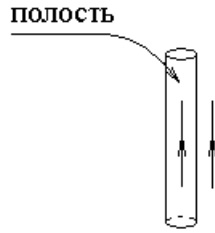
$$\begin{cases} D_{2n} - D_{1n} = 0 \\ E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} B_{2n} - B_{1n} = 0 \\ H_{2\tau} - H_{1\tau} = 0 \end{cases}$$

Поэтому дальнейшие рассуждения одинаковы для электрического и магнитного полей.

-----

Рассмотрим полость в виде длинного цилиндра с осью цилиндра направленной вдоль поля.

Для цилиндрической полости, вытянутой вдоль поля, линии поля идут по касательной к боковой поверхности цилиндра полости и почти не искривляются.



Граничные условия на боковой поверхности полости:

$$E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \quad \text{или} \quad H_{2\tau} - H_{1\tau} = 0. \quad \Rightarrow$$

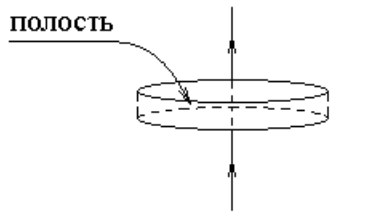
Напряженность в полости, вытянутой вдоль поля, одинаковая в среде и в полости.

Индукция поля в среде и в полости различная.

Измеряя поле в такой полости, мы измеряем напряженность электрического или магнитного поля в веществе.

-----

Для цилиндрической полости, сплюснутой перпендикулярно полю, линии поля направлены перпендикулярно доньшкам полости и, проходя через доньшки, почти не искривляются.



Граничные условия на доньшках полости:

$$D_{2n} - D_{1n} = 0 \quad \text{или} \quad B_{2n} - B_{1n} = 0 \quad \Rightarrow$$

Индукция в полости, сплюснутой перпендикулярно полю, одинаковая в среде и в полости. Напряженность поля в среде и в полости различная.

Измеряя поле в такой полости, мы измеряем электрическую или магнитную индукцию в веществе.

Совсем факультативная вставка.

Рассмотрим полость в форме шара. Электрическое поле.

Пусть:

$\vec{E}_0$  — напряженность электрического поля вдали от полости,

Придумаем, что  $\vec{E}_1 = \overline{const}$  — напряженность однородного электрического поля внутри полости.

$\vec{E}_p = 3 \frac{(\vec{p}, \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}$  — напряженность электрического поля точечного

диполя.

Придумаем, что поле снаружи полости  $\vec{E}_2 = \vec{E}_0 + \vec{E}_p$ .

Проверим, что придуманное поле удовлетворяет граничным условиям:

$$\begin{cases} D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma \\ E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon E_{2n} - E_{1n} = 0 \\ E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_{1n} = \varepsilon E_{2n} \\ E_{1\tau} = E_{2\tau} \end{cases}$$

Подставим

$$\begin{cases} E_{1n} = E_1 \cos(\theta) \\ E_{1\tau} = E_1 \sin(\theta) \\ E_{2n} = E_0 \cos(\theta) + 3 \frac{p \cos(\theta)}{R^3} - \frac{p \cos(\theta)}{R^3} = E_0 \cos(\theta) + 2 \frac{p \cos(\theta)}{R^3} \\ E_{2\tau} = E_0 \sin(\theta) - \frac{p \sin(\theta)}{R^3} \end{cases}$$

В

$$\begin{cases} E_{1n} = \varepsilon E_{2n} \\ E_{1\tau} = E_{2\tau} \end{cases}$$

и после сокращения первого равенства на  $\cos(\theta)$ , а второго — на  $\sin(\theta)$

получим

$$\begin{cases} E_1 = \varepsilon E_0 + 2\varepsilon \frac{p}{R^3} \\ E_1 = E_0 - \frac{p}{R^3} \end{cases}$$

Откуда

$$E_1 = \frac{3\varepsilon}{1+2\varepsilon} E_0.$$

Аналогично для магнитного поля:

$$H_1 = \frac{3\mu}{1+2\mu} H_0$$

или

$$B_1 = \frac{3}{1+2\mu} B_0$$

Конец совсем факультативной вставки.

### Экзамен. Магнитная восприимчивость и магнитная проницаемость среды.

$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$  — определение  $\chi_m$  — магнитной восприимчивости среды.

Аналогично  $\vec{P} = \chi \vec{E}$  для электрического поля.

$\vec{B} = \mu \vec{H}$  — определение  $\mu$  — магнитной проницаемости среды.

Аналогично  $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$  для электрического поля.

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi \vec{M} = \vec{H} + 4\pi \chi_m \vec{H} = (1 + 4\pi \chi_m) \vec{H} = \mu \vec{H} \quad \Rightarrow$$

$$\mu = 1 + 4\pi \chi_m \quad \text{аналогично} \quad \varepsilon = 1 + 4\pi \chi.$$

В системе СИ:

$$\begin{array}{llll} \vec{M} = \chi_m \vec{H} & \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H} & \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) & \mu = 1 + \chi_m \\ \vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} & \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} & \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} & \varepsilon = 1 + \chi \end{array}$$

**Факультатив. Связанные токи обычно присутствуют только на поверхности намагниченной среды.**

$$\vec{j}' = c \cdot \text{rot}(\vec{M}) = c \cdot \text{rot}(\chi_m \vec{H})$$

Если магнетик однородный, то магнитную восприимчивость  $\chi_m$  можно вынести за знак производной везде, кроме точек границы магнетика. Вынесем  $\chi_m$  за знак ротора и получим

$$\vec{j}' = c \cdot \chi_m \cdot \text{rot}(\vec{H}) = c \cdot \chi_m \cdot \frac{4\pi}{c} \vec{j} = 4\pi \chi_m \vec{j} \quad \Rightarrow$$

$$\vec{j}' = 4\pi \chi_m \vec{j}$$

Если в объеме намагниченной среды нет токов проводимости  $\vec{j}$ , то нет и связанных токов  $\vec{j}'$ . Поэтому связанные токи обычно протекают только по поверхности намагниченной среды.

**Экзамен. Два способа вычисления векторного потенциала  $A$  магнитного поля, создаваемого намагниченной средой.**

$$d\vec{A} = \frac{\vec{j}' \cdot dV}{cr} \quad \Rightarrow \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int_{V'} \frac{\vec{j}'(\vec{r}') \cdot dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{c} \int_{S'} \frac{\vec{i}'(\vec{r}') \cdot dS'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Здесь в правой части равенства обычно отлично от нуля только второе слагаемое, так как связанные токи обычно протекают только по поверхности магнетика.

$$\vec{A} = \frac{[\vec{m}, \vec{r}]}{r^3} \quad \Rightarrow \quad \vec{A}(\vec{r}) = \int_{V'} \frac{[\vec{M}(\vec{r}'), \vec{r} - \vec{r}']}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$$

Факультативная вставка.

Интегралы для векторного потенциала, как и для потенциала, создаваемого поляризованным диэлектриком, содержат интегрируемую особую точку  $\vec{r} - \vec{r}' = 0$ . Особенность интегрируемая, так как ее можно устранить заменой переменной интегрирования  $\vec{r}'$  на  $\vec{r}_0 = \vec{r}' - \vec{r}$ .

Конец факультативной вставки.

**Факультатив. Два способа вычисления магнитного поля  $B$ , создаваемого намагниченной средой.**

Первый способ.

$$d\vec{B} = \frac{1}{c} \cdot \frac{[\vec{j}, \vec{r}]}{r^3} \cdot dV \quad \Rightarrow$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int_{V'} \frac{[\vec{j}'(\vec{r}'), \vec{r} - \vec{r}']}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' + \frac{1}{c} \oint_{S'} \frac{[\vec{i}'(\vec{r}'), \vec{r} - \vec{r}']}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dS'$$

Здесь отличен от нуля обычно только второй интеграл, так как связанные токи обычно протекают только по поверхности магнетика. Второй интеграл имеет неинтегрируемую особую точку, если точка вычисления магнитного поля находится на поверхности со связанными токами. На такой поверхности поле  $\vec{B}$  испытывает скачок и не имеет определенного значения, магнитное поле испытывает скачок на токонесящей поверхности.

Второй способ.

$$\vec{B} = 3 \frac{(\vec{m}, \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} + \frac{8}{3} \pi \vec{m} \delta(\vec{r}) \quad \Rightarrow$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \int_{V'} \left\{ 3 \frac{(\vec{M}(\vec{r}'), \vec{r} - \vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^5} - \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right\} dV' + \frac{8}{3} \pi \vec{M}(\vec{r})$$

Здесь интегралы нужно понимать в смысле главного значения. Подробнее смотрите аналогичный вопрос для электрического поля.

$$\vec{H}(\vec{r}) = \vec{B}(\vec{r}) - 4\pi \vec{M}(\vec{r})$$

### **Факультатив. Третий способ вычисления магнитного поля намагниченной среды.**

Третий способ вычисления магнитного поля — найти напряженность магнитного поля  $\vec{H}$  магнитных зарядов, которых на самом деле нет.

Магнитное поле, создаваемое намагниченной средой, во всех отношениях такое, как будто оно создано магнитными зарядами.

По аналогии с электрическим полем можно построить и теорию магнитного поля:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= q \frac{\vec{r}}{r^3} & \Rightarrow & \vec{H} = q_m \frac{\vec{r}}{r^3} \\ \vec{p} &= q \vec{l} & \Rightarrow & \vec{m} = q_m \vec{l} \\ \vec{P} &= \frac{d\vec{p}}{dV} & \Rightarrow & \vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dV} \\ \vec{D} &= \vec{E} + 4\pi \vec{P} & \Rightarrow & \vec{B} = \vec{H} + 4\pi \vec{M} \end{aligned}$$

Однако оказалось, что магнитное поле создается токами, а не зарядами.

Причем при усреднении внутриатомного магнитного поля получается поле  $\vec{B}$ , а не  $\vec{H}$ .

Третий способ вычисления магнитного поля  $\vec{B}$  имеет следующий алгоритм:  $\vec{M} \rightarrow \sigma'_m \rightarrow \vec{H} \rightarrow \vec{B}$ .

Здесь  $M_{2n} - M_{1n} = -\sigma'_m$  аналогично  $P_{2n} - P_{1n} = -\sigma'$  для диэлектриков.

$$\vec{H}(\vec{r}) = \oint_{S'} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \sigma'_m(\vec{r}') \cdot dS'$$

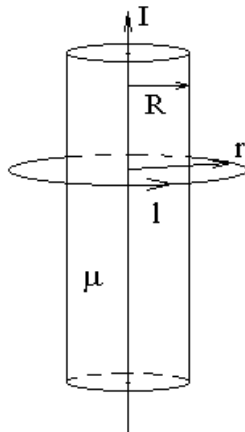
$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M}.$$

**Примеры решения задач с магнетиками.**

**Экзамен. 1. Магнитное поле длинного провода с током в цилиндрической оболочке из магнитного материала.**

$$\vec{B} = \vec{B}_\varphi + \vec{B}_r + \vec{B}_z$$

$$H_\varphi = ?$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_l H_l dl = \frac{4\pi}{c} I \\ H_l = H_\varphi \end{array} \right. \Rightarrow H_\varphi l = \frac{4\pi}{c} I \Rightarrow 2\pi r \cdot H_\varphi = \frac{4\pi}{c} I \Rightarrow$$

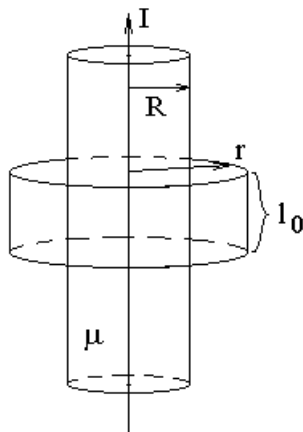
$$H_\varphi = \frac{2I}{cr}. \text{ Тогда с учетом } \vec{B} = \mu\vec{H} \text{ получим}$$

$$B_\varphi = \mu \frac{2I}{cr} \text{ при } r < R \quad \text{и} \quad B_\varphi = \frac{2I}{cr} \text{ при } r > R$$

-----  
Докажем, что двух остальных составляющих магнитного поля нет.

$$B_r = ?$$

Рассмотрим поток поля  $\vec{B}$  через поверхность цилиндра, положение которого соответствует симметрии задачи.



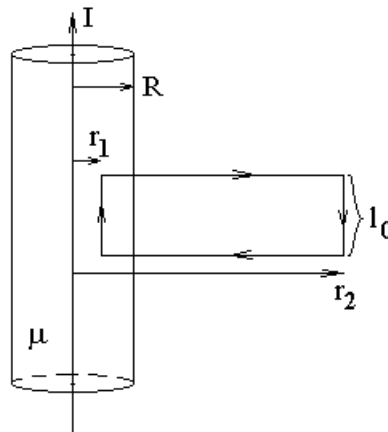
Поток поля  $\vec{B}$  может создавать только составляющая  $B_r$ . Эта составляющая может создать поток только через боковую поверхность цилиндра. Тогда

$$\Phi_B = \Phi_{B_r} = B_r S = 2\pi r l_0 \cdot B_r$$

Поток поля  $\vec{B}$  через любую замкнутую поверхность равен нулю  $\Phi_B = 0$ , следовательно,  $B_r = 0$ .

-----  
 $H_z = ?$

Рассмотрим циркуляцию поля  $\vec{H}$  по прямоугольному контуру, в плоскости которого лежит провод с током.



$$\oint_l H_l dl = \frac{4\pi}{c} I$$

Правая часть равенства равна нулю, так как нет токов проводимости, пронизывающих контур интегрирования.

В левую часть равенства в циркуляцию магнитного поля дают вклад только вертикальные отрезки контура, так как горизонтальные отрезки направлены радиально, а радиальная составляющая магнитного поля равна нулю  $B_r = 0$ .

Вклад в циркуляцию на вертикальном отрезке равен произведению вертикальной составляющей магнитного поля на длину вертикального отрезка  $l_0$ . На левом вертикальном отрезке  $H_l = H_z$ , а на правом отрезке  $H_l = -H_z$ . Тогда

$$\oint_l H_l dl = \frac{4\pi}{c} I \quad \Rightarrow \quad H_l(r_1) \cdot l_0 + H_l(r_2) \cdot l_0 = 0 \quad \Rightarrow$$

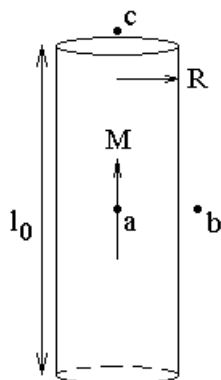
$$H_z(r_1) \cdot l_0 - H_z(r_2) \cdot l_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad H_z(r) = const$$

$$\text{Но } H_z(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0, \text{ тогда } H_z(r) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$B_z = 0.$$

**Экзамен. 2. Магнитное поле длинного намагниченного цилиндра в трех характерных точках.**

Пусть длинный цилиндр намагничен вдоль оси. Найдём магнитное поле в точках  $a$ ,  $b$ ,  $c$ :

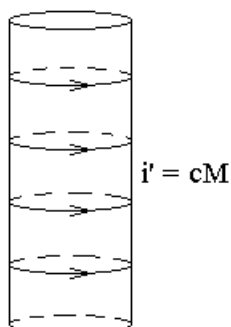


Здесь точка  $a$  находится в центре цилиндра, точка  $b$  — у боковой поверхности цилиндра в середине его высоты, точка  $c$  — непосредственно над серединой торца цилиндра.

В этих трех точках найдём магнитное поле связанных токов.

Можно считать, что есть только связанные токи, а материала магнетика нет, что токи висят в вакууме. Найдём магнитное поле токов.

Связанные токи текут по поверхности цилиндра вокруг вектора намагниченности по правилу правого винта.



Из симметрии задачи следует, что магнитное поле в этих трех точках направлено вдоль оси цилиндра. Для каждой малой площадки с током составляющая вдоль оси цилиндра перпендикулярна току и перпендикулярна нормали к поверхности, по которой течет ток. Следовательно,

$$B = B_{\perp} = \frac{i'}{c} \Omega = M \Omega, \text{ где } \Omega \text{ — телесный угол, под которым из точки}$$

наблюдения поля видна поверхность с током. Последнее равенство в цепочке определяется граничным условием для намагниченности  $M_{\tau} = \frac{i'}{c}$ .

Для определения величины магнитного поля  $B$  в рассматриваемых трех точках достаточно найти телесный угол  $\Omega$ , под которым поверхность с током видна из точки наблюдения магнитного поля.

Для точки  $a$  телесный угол  $\Omega$  — это полный телесный угол  $4\pi$  минус два телесных угла, под каждым из которых видно одно доньшко цилиндра из



его середины. Этот телесный угол равен отношению площади доньшка к квадрату расстояния от точки наблюдения до доньшка. Тогда:

$$B_a = M\Omega_a \approx M \cdot \left( 4\pi - 2 \frac{\pi R^2}{\left(\frac{l_0}{2}\right)^2} \right)$$
$$H_a = B_a - 4\pi M \approx -2M \frac{\pi R^2}{\left(\frac{l_0}{2}\right)^2}.$$

-----