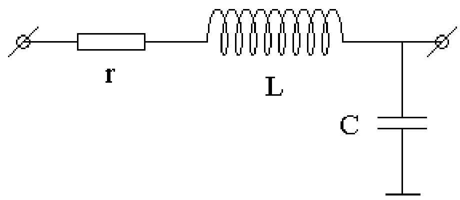
<u>Экзамен. Резонанс напряжений</u> <u>(продолжение)</u>**.**

Будем считать, что напряжение на входе схемы — это напряжение на всем колебательном контуре, а напряжение на выходе схемы — это напряжение на конденсаторе. Тогда



Амплитуда напряжения на выходе схемы в резонансе много больше, чем амплитуда напряжения на входе схемы. В резонансе напряжение на конденсаторе и напряжение на катушке индуктивности становятся очень большими, но эти два напряжения изменяются в противофазе, поэтому напряжение на всем колебательном контуре гораздо меньше каждого из них.

Рассмотрим задачу количественно.

Как и обычно будем считать, что выход схемы не потребляет тока. Тогда напишем уравнение Кирхгофа для контура в комплексном виде.

$$\sum_i \mathcal{E}_i = \sum_i U_i \quad => \quad \widetilde{U}_{вх} = r\tilde{I} + i\omega L\tilde{I} + \frac{1}{i\omega C}\tilde{I} \quad =>$$

$$\tilde{I} = \frac{1}{r + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}}\widetilde{U}_{вх} \quad =>$$

$$\widetilde{U}_{вых} = \widetilde{U}_C = \frac{1}{i\omega C}\tilde{I} = \frac{\frac{1}{i\omega C}}{r + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}}\widetilde{U}_{вх}$$

$$\widetilde{U}_{вых} = \frac{\frac{1}{i\omega C}}{r + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}}\widetilde{U}_{вх}$$

По определению комплексный коэффициент передачи по напряжению равен отношению комплексных напряжений на выходе и на входе схемы:

$$\widetilde{K}_U \equiv \frac{\widetilde{U}_{вых}}{\widetilde{U}_{вх}} = \frac{\frac{1}{i\omega C}}{r + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}}.$$

Заметим, что комплексный коэффициент передачи равен отношению комплексных амплитуд на выходе и на входе схемы:

$$\widetilde{K}_U \equiv \frac{\widetilde{U}_{вых}}{\widetilde{U}_{вх}} = \frac{\widetilde{U}_{0\_вых}\, e^{i\omega t}}{\widetilde{U}_{0\_вх}\, e^{i\omega t}} = \frac{\widetilde{U}_{0\_вых}}{\widetilde{U}_{0\_вх}}.$$

По определению вещественный коэффициент передачи по напряжению равен отношению вещественных амплитуд на выходе и на входе схемы, его также называют амплитудным коэффициентом передачи или коэффициентом передачи по амплитуде:

$$K_U \equiv \frac{U_{0\_вых}}{U_{0\_вх}}.$$

Вещественный коэффициент передачи по напряжению равен модулю комплексного коэффициента передачи:

$$\left|\widetilde{K}_U\right| = \left|\frac{\widetilde{U}_{вых}}{\widetilde{U}_{вх}}\right| = \left|\frac{\widetilde{U}_{0\_вых}\, e^{i\omega t}}{\widetilde{U}_{0\_вх}\, e^{i\omega t}}\right| = \left|\frac{\widetilde{U}_{0\_вых}}{\widetilde{U}_{0\_вх}}\right| = \frac{\left|\widetilde{U}_{0\_вых}\right|}{\left|\widetilde{U}_{0\_вх}\right|} = \frac{U_{0\_вых}}{U_{0\_вх}} = K_U \qquad =>$$

$$K_U = \left|\widetilde{K}_U\right| = \left|\frac{\frac{1}{i\omega C}}{r + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}}\right| = \frac{\left|\frac{1}{i\omega C}\right|}{\left|r + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right|} = \frac{\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \qquad =>$$

$$K_U = \frac{\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Знаменатель минимален на частоте ω_0, такой что $\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0$ =>

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ — эта частота называется резонансной частотой колебательного контура.

Заметим, что максимум вещественного коэффициента передачи достигается обычно на близкой, но несколько отличающейся частоте, так как минимум знаменателя $\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$ не совпадает с максимумом дроби

$$K_U = \frac{\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

Разница в этих частотах мала, если $r << \sqrt{\frac{L}{C}}$.

Величину $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$ называют волновым сопротивлением колебательного контура.

Найдем величину вещественного коэффициента передачи на резонансной частоте колебательного контура ω_0:

$$K_U(\omega_0) = \frac{\dfrac{1}{\omega_0 C}}{\sqrt{r^2 + \left(\omega_0 L - \dfrac{1}{\omega_0 C}\right)^2}}.$$

С учетом того, что на резонансной частоте $\omega_0 L - \dfrac{1}{\omega_0 C} = 0$, получим

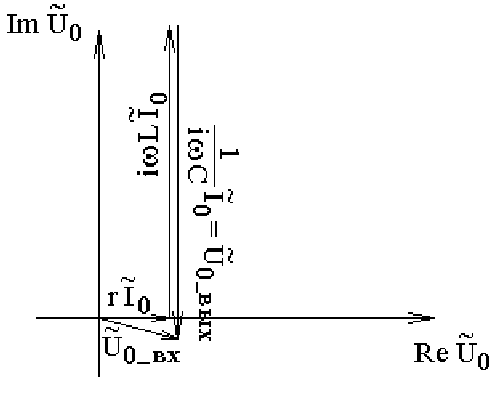
$$K_U(\omega_0) = \frac{\dfrac{1}{\omega_0 C}}{r} = \frac{\dfrac{\sqrt{LC}}{C}}{r} = \frac{\sqrt{\dfrac{L}{C}}}{r} = \frac{\rho}{r}$$

$K_U(\omega_0) = \dfrac{\rho}{r}$, где $\rho \equiv \sqrt{\dfrac{L}{C}}$ — волновое сопротивление колебательного контура.

Если $r << \rho$, то $U_{0\_вых} >> U_{0\_вх}$ — на резонансной частоте напряжение на выходе схемы гораздо больше, чем на входе.

Диаграмма на комплексной плоскости амплитуд позволяет наглядно объяснить, как это возможно.

Выбором нулевого момента времени мы изменяем начальную фазу колебаний и поворачиваем все комплексные амплитуды на один и тот же угол на комплексной плоскости. Выберем нулевой момент времени так, чтобы направление комплексной амплитуды тока $\tilde{I}_0$ совпадало с направлением вещественной оси.



Напряжения на всех элементах схемы пропорциональны комплексной амплитуде тока, но коэффициенты пропорциональности комплексные, поэтому комплексные амплитуды напряжений по-разному направлены на комплексной плоскости.

Комплексная амплитуда напряжения на резисторе r равна $r\tilde{I}_0$ и направлена, как и комплексная амплитуда тока $\tilde{I}_0$ вдоль вещественной оси.

Комплексная амплитуда напряжения на индуктивности $i\omega L\tilde{I}_0$ равна произведению двух комплексных чисел $\tilde{I}_0$ и $i\omega L$. Фаза комплексного числа равна углу поворота соответствующего ему вектора относительно вещественной оси. Для сомножителя $\tilde{I}_0$ этот угол равен нулю, а для сомножителя $i\omega L$ равен $\frac{\pi}{2}$. При перемножении комплексных чисел их фазы складываются, поэтому фаза произведения $i\omega L\tilde{I}_0$ равна $\frac{\pi}{2}$. Следовательно, эта комплексная амплитуда направлена вертикально вверх на комплексной плоскости.

Комплексная амплитуда напряжения на конденсаторе $\frac{1}{i\omega C}\tilde{I}_0 = \widetilde{U}_{0\_вых}$ имеет такую же фазу, как и $\frac{1}{i} = -i$. Фаза равна $-\frac{\pi}{2}$ и комплексная амплитуда $\frac{1}{i\omega C}\tilde{I}_0$ направлена вертикально вниз.

Сумма комплексных амплитуд на трех элементах схемы: резисторе, катушке индуктивности и конденсаторе равна комплексной амплитуде суммарного напряжения, то есть напряжения на входе схемы $\widetilde{U}_{0\_вх}$.

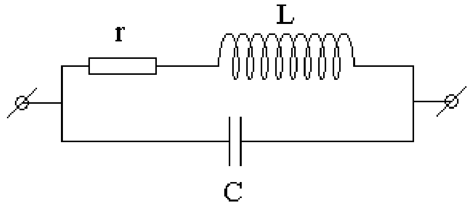
Из рисунка видно, что модули комплексных амплитуд на катушке индуктивности и на конденсаторе могут быть гораздо больше модуля комплексной амплитуды входного напряжения, так как напряжения на катушке индуктивности и на конденсаторе противофазны и вычитаются друг из друга.

На комплексной плоскости напряжений, а не амплитуд, вся эта картина сложения амплитуд вращается с угловой скоростью ω против часовой стрелки. Проекции векторов на вещественную ось равны мгновенным значениям напряжений.

Экзамен. Резонанс токов.

Резонанс токов наблюдается в параллельном колебательном контуре.

Параллельный колебательный контур — это двухполюсник, внутри которого катушка индуктивности и конденсатор соединены параллельно.

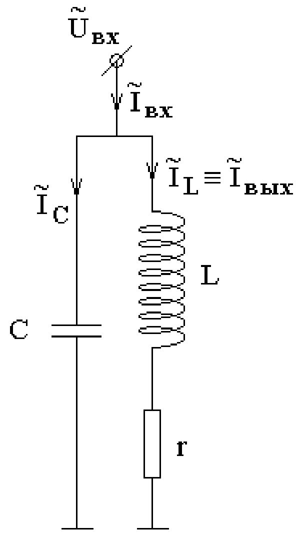


Резонанс токов состоит в том, что амплитуда тока на выходе схемы, как функция частоты, имеет узкий пик (при неизменной амплитуде тока на входе).

В данном случае ток на входе схемы — это ток, который протекает через обе клеммы двухполюсника, а током на выходе схемы считают ток внутри LC-контура. Для выходного тока катушка индуктивности и конденсатор включены последовательно и это их общий ток. Входной ток схемы тоже как-то протекает через эти же элементы схемы, поэтому силы тока через конденсатор и катушку индуктивности несколько отличаются друг от друга.

Нам будет удобнее считать, что выходной ток схемы — это ток, протекающий через катушку индуктивности. При таком выборе формулы для резонанса токов будут очень похожи на формулы резонанса напряжений.

Обычно один полюс двухполюсника параллельного колебательного контура является общим проводом схемы. Рассмотрим именно такой вариант.



Входной ток $\tilde{I}_{вх}$ разветвляется на ток конденсатора $\tilde{I}_C$ и ток катушки индуктивности $\tilde{I}_L$. Тогда уравнение Кирхгофа для узла примет следующий вид:

$$\sum_i I_i = 0 \qquad => \qquad \tilde{I}_{вх} = \tilde{I}_C + \tilde{I}_L$$

Силу тока через конденсатор и катушку индуктивности можно выразить через комплексное напряжение и комплексное сопротивление. Тогда

$$\begin{cases} \tilde{I}_C = \dfrac{\widetilde{U}_{вх}}{\widetilde{Z}_C} \\ \tilde{I}_L = \dfrac{\widetilde{U}_{вх}}{\widetilde{Z}_L + r} \end{cases} \qquad =>$$

$$\tilde{I}_{вх} = \frac{\widetilde{U}_{вх}}{\widetilde{Z}_C} + \frac{\widetilde{U}_{вх}}{\widetilde{Z}_L + r} = \frac{\widetilde{U}_{вх}}{\dfrac{1}{i\omega C}} + \frac{\widetilde{U}_{вх}}{i\omega L + r} = \widetilde{U}_{вх}\left(i\omega C + \frac{1}{r + i\omega L}\right)$$

Сравним этот входной ток с выходным током:

$$\tilde{I}_{вых} = \tilde{I}_L = \frac{\widetilde{U}_{вх}}{\widetilde{Z}_L + r} = \frac{\widetilde{U}_{вх}}{r + i\omega L}.$$

$\widetilde{K}_I \equiv \dfrac{\tilde{I}_{вых}}{\tilde{I}_{вх}}$ — комплексный коэффициент передачи по току.

$$\widetilde{K}_I \equiv \frac{\tilde{I}_{вых}}{\tilde{I}_{вх}} = \frac{\dfrac{\widetilde{U}_{вх}}{r+i\omega L}}{\widetilde{U}_{вх}\left(i\omega C + \dfrac{1}{r+i\omega L}\right)} = \frac{\dfrac{1}{r+i\omega L}}{i\omega C + \dfrac{1}{r+i\omega L}} =$$

$$= \frac{1}{i\omega C\left(r+i\omega L\right)+1} = \frac{\dfrac{1}{i\omega C}}{r+i\omega L+\dfrac{1}{i\omega C}} \qquad \Rightarrow$$

$$\widetilde{K}_I = \frac{\dfrac{1}{i\omega C}}{r+i\omega L+\dfrac{1}{i\omega C}}$$

Это выражение полностью совпадает с выражением для комплексного коэффициента передачи по напряжению в вопросе "Резонанс напряжений". Поэтому все дальнейшие формулы будут аналогичны в этих двух вопросах.

$K_I \equiv \dfrac{I_{0\_вых}}{I_{0\_вх}}$ — вещественный коэффициент передачи по току.

Вещественный коэффициент передачи по току равен модулю комплексного коэффициента передачи по току. И действительно:

$$\left|\widetilde{K}_I\right| \equiv \left|\frac{\tilde{I}_{вых}}{\tilde{I}_{вх}}\right| = \left|\frac{\tilde{I}_{0\_вых}\, e^{i\omega t}}{\tilde{I}_{0\_вх}\, e^{i\omega t}}\right| = \left|\frac{\tilde{I}_{0\_вых}}{\tilde{I}_{0\_вх}}\right| = \frac{I_{0\_вых}}{I_{0\_вх}} = K_I$$

Тогда

$$K_I = \left|\widetilde{K}_I\right| = \left|\frac{\dfrac{1}{i\omega C}}{r+i\omega L+\dfrac{1}{i\omega C}}\right| = \frac{\dfrac{1}{\omega C}}{\sqrt{r^2+\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Знаменатель дроби минимален при условии $\omega_0 L - \dfrac{1}{\omega_0 C} = 0 \Rightarrow$

$\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ — резонансная частота колебательного контура одинаковая для параллельного и последовательного колебательного контура.

$K_I\left(\omega_0\right) = \dfrac{\dfrac{1}{\omega_0 C}}{r} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{LC}}{C}}{r} = \dfrac{\sqrt{\dfrac{L}{C}}}{r} = \dfrac{\rho}{r}$, где $\rho \equiv \sqrt{\dfrac{L}{C}}$ — волновое сопротивление колебательного контура.

При условии $\rho >> r$ получаем, что $K_I >> 1$ или $I_{0\_вых} >> I_{0\_вх}$ — это и есть резонанс токов.

Факультатив. Напряжение на выходе линейной схемы при произвольной зависимости напряжения на входе от времени (второй подход).

В математике есть операции прямого и обратного преобразования Фурье:

$$\begin{cases} \tilde{y}_0(\omega) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{y}(t)\cdot e^{-i\omega t}dt \\ \tilde{y}(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{y}_0(\omega)\cdot e^{i\omega t}d\omega \end{cases}$$

Применим прямое преобразование Фурье к напряжению на входе схемы:

$$\tilde{U}_{0\_вх}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} U_{вх}(t)\cdot e^{-i\omega t}dt.$$

Здесь $\tilde{U}_{0\_вх}(\omega)\cdot d\omega$ — комплексная амплитуда входного напряжения в полосе частот от ω до $\omega + d\omega$, что видно из обратного преобразования Фурье:

$$U_{вх}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{U}_{0\_вх}(\omega)\cdot e^{i\omega t}d\omega.$$

Комплексная амплитуда напряжения на выходе схемы для каждой частоты сигнала выражается через комплексную амплитуду на входе и комплексный коэффициент передачи:

$\tilde{U}_{0\_вых}(\omega) = \tilde{K}_U(\omega)\cdot\tilde{U}_{0\_вх}(\omega)$, где $\tilde{K}_U$ — комплексный коэффициент передачи по напряжению, который мы умеем находить. Сделаем соответствующую замену в обратном преобразовании Фурье для выходного напряжения:

$$U_{вых}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{U}_{0\_вых}(\omega)\cdot e^{i\omega t}d\omega \qquad =>$$

$$U_{вых}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{K}_U(\omega)\cdot\tilde{U}_{0\_вх}(\omega)\cdot e^{i\omega t}d\omega$$

Тогда

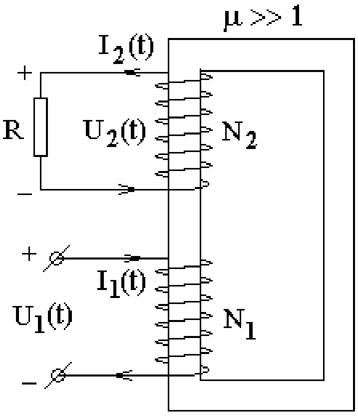
$$\begin{cases} \tilde{U}_{0\_вх}(\omega) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} U_{вх}(t)\cdot e^{-i\omega t}dt \\ U_{вых}(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{K}_U(\omega)\cdot\tilde{U}_{0\_вх}(\omega)\cdot e^{i\omega t}d\omega \end{cases}.$$

Эти два равенства позволяют найти напряжение на выходе схемы $U_{вых}(t)$ через напряжение на ее входе $U_{вх}(t)$, если мы знаем комплексный коэффициент передачи схемы $\tilde{K}_U(\omega)$, как функцию частоты ω.

Экзамен. Трансформатор.

(в системе СИ)

Трансформатор — две катушки на общем замкнутом сердечнике с высокой магнитной проницаемостью $\mu >> 1$.



Чтобы правильно найти связи между величинами нужно внимательно следить за их знаками.

Правило знаков.

1. Пусть обе катушки намотаны в одну сторону и расположены на одной стороне сердечника.
2. $U_1 > 0$, если на верхнем проводе "+" напряжения.
3. $U_2 > 0$, если на верхнем проводе "+" напряжения.
4. $I_1 > 0$, если ток через катушку течет сверху вниз.
5. $I_2 > 0$, если наоборот, ток через катушку течет снизу вверх.

Дело в том, что при этом ток через сопротивление R течет сверху вниз и $U_2 = RI_2$. Иначе было бы $U_2 = -RI_2$.

Обозначим за Φ поток поля $\vec{B}$ через один виток.

$$\begin{cases} \mathcal{E}_{инд\_1} = -\dfrac{d\left(N_1\Phi\right)}{dt} \\ \mathcal{E}_{инд\_2} = -\dfrac{d\left(N_2\Phi\right)}{dt} \\ U_1 + \mathcal{E}_{инд\_1} = 0 \\ U_2 + \mathcal{E}_{инд\_2} = 0 \\ \Phi = BS \\ B = \mu_0\mu H \\ Hl = N_1 I_1 - N_2 I_2 \\ U_2 = RI_2 \end{cases} \qquad (1) \qquad =>$$

Из средней четверки системы из восьми уравнений выразим четыре неизвестных

$$\begin{cases} \mathcal{E}_{инд\_1} = -U_1 \\ \mathcal{E}_{инд\_2} = -U_2 \\ B = \mu_0 \mu H \\ \Phi = S \cdot \mu_0 \mu H \end{cases}$$ и подставим их в остальные уравнения. Тогда получим систему из четырех уравнений

$$\begin{cases} U_1 = N_1 S \mu_0 \mu \dot{H} \\ U_2 = N_2 S \mu_0 \mu \dot{H} \\ Hl = N_1 I_1 - N_2 I_2 \\ U_2 = R I_2 \end{cases} \qquad (2)$$

Разделим второе уравнение системы (2) на первое и получим

$\dfrac{U_2}{U_1} = \dfrac{N_2}{N_1}$ <=> $U_2 = \dfrac{N_2}{N_1} U_1$ <=> $U_2 = nU_1$, где $n \equiv \dfrac{N_2}{N_1}$ — коэффициент трансформации.

Решения для неизвестных величин будем подчеркивать $\underline{U_2 = \dfrac{N_2}{N_1} U_1}$.

Напряжение в каждой обмотке пропорционально числу витков $\dfrac{U_2}{U_1} = \dfrac{N_2}{N_1}$ при любой зависимости $U_1(t)$.

Однако на опыте, если $U_1 = const$, то $U_2 = 0$. Причина в том, что мы не учли активное сопротивление первичной обмотки. В стационарном случае, каким бы малым ни было сопротивление первичной обмотки, постоянное напряжение выделяется именно на нем, а не на индуктивности, поэтому постоянное напряжение не переходит во вторичную обмотку.

В четвертое уравнение $U_2 = RI_2$ системы (2) подставим $U_2 = \dfrac{N_2}{N_1} U_1$ и получим

$$\underline{I_2 = \frac{N_2}{N_1} \cdot \frac{U_1}{R}}.$$

Из первого уравнения $U_1 = N_1 S \mu_0 \mu \dot{H}$ системы (2) выразим напряженность магнитного поля в сердечнике и получим

$$\underline{H = \frac{1}{\mu_0 \mu N_1 S} \int_0^t U_1(t')\,dt'}.$$

Из третьего уравнения $U_1 + \mathcal{E}_{инд\_1} = 0$ системы (1) получим

$\mathcal{E}_{инд\_1} = -U_1$.

Из четвертого уравнения $U_2 + \mathcal{E}_{инд\_2} = 0$ системы (1) получим

$$\mathcal{E}_{инд\_2} = -U_2 = -\frac{N_2}{N_1}U_1 \qquad =>$$

$$\mathcal{E}_{инд\_2} = -\frac{N_2}{N_1}U_1$$

Из шестого уравнения $B = \mu_0 \mu H$ системы (1) получим

$$B = \mu_0 \mu H = \frac{1}{N_1 S}\int_0^t U_1(t')dt' \qquad =>$$

$$B = \frac{1}{N_1 S}\int_0^t U_1(t')dt'$$

Из пятого уравнения $\Phi = BS$ системы (1) получим

$$\Phi = BS = \frac{1}{N_1}\int_0^t U_1(t')dt' \quad =>$$

$$\Phi = \frac{1}{N_1}\int_0^t U_1(t')dt'$$

Из седьмого уравнения $Hl = N_1 I_1 - N_2 I_2$ системы (1) получим

$$I_1 = \frac{N_2}{N_1}I_2 + \frac{Hl}{N_1} = \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 \frac{U_1}{R} + \frac{l}{\mu_0 \mu S N_1^2}\int_0^t U_1(t')dt' \qquad =>$$

$$I_1 = \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 \frac{U_1}{R} + \frac{l}{\mu_0 \mu S N_1^2}\int_0^t U_1(t')dt'$$

Проанализируем эту формулу при $R \to \infty$ $\qquad =>$

$$I_1 = \frac{l}{\mu_0 \mu S N_1^2}\int_0^t U_1(t')dt' \quad => \qquad U_1 = \frac{\mu_0 \mu N_1^2 S}{l}\dot{I}_1 = L_{11}\dot{I}_1$$

$$L_{11} = \frac{\mu_0 \mu N_1^2 S}{l} \qquad =>$$

$$I_1 = \frac{U_1}{\left(\frac{R}{n^2}\right)} + \frac{1}{L_{11}}\int_0^t U_1(t')dt',$$

где $n = \frac{N_2}{N_1}$ — коэффициент трансформации.

Условие $R \to \infty$ — это условие отсутствия нагрузки во вторичной обмотке трансформатора. Ток первичной обмотки при этом называется холостым током трансформатора. Для уменьшения холостого тока нужно стремиться увеличить индуктивность первичной обмотки $L_{11} \to \infty$, при этом $I_1 = \dfrac{U_1}{\left(\dfrac{R}{n^2}\right)}$.

Тогда можно сказать, что величина $\dfrac{R}{n^2}$ — это сопротивление нагрузки, пересчитанное в первичную обмотку.

При $L_{11} \to \infty$ => $I_1 \approx \dfrac{U_1}{\left(\dfrac{R}{n^2}\right)} = n\dfrac{nU_1}{R} = n\dfrac{U_2}{R} = nI_2$ =>

$I_1 \approx nI_2$ — трансформатор тока.

Основные формулы для трансформатора:

$\begin{cases} \dfrac{U_2}{U_1} = \dfrac{N_2}{N_1} \\ U_1 I_1 \approx U_2 I_2 \end{cases}$, где второе уравнение означает, что вся мощность, подводимая к первичной обмотке, передается во вторичную обмотку.