Экзамен. Теорема о циркуляции электростатического поля E в дифференциальной форме.

По теореме о циркуляции электростатического поля для любого контура l:

$$\oint_l \left(\vec{E}, d\vec{l}\right) = 0 \qquad \left|\cdot\frac{1}{S}\right. \qquad \left| S \to 0 \right. \qquad =>$$

$\left(rot\left(\vec{E}\right)\right)_n = 0$ — для любого направления вектора нормали $\vec{n}$. Тогда

$$rot\left(\vec{E}\right) = 0$$

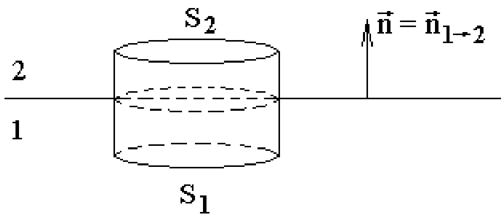
Экзамен. Скачок электрического поля E при переходе через заряженную поверхность.

Этот же вопрос можно было бы назвать "граничные условия для поля $\vec{E}$ в вакууме", так как заряженную поверхность можно рассматривать, как границу двух объемов.

Любая поверхность вблизи выглядит плоской.

Рассмотрим скачок поля $\vec{E}$ на плоской поверхности с поверхностной плотностью заряда σ.

Рассмотрим цилиндр малой высоты с основаниями параллельными заряженной плоскости. Пусть основания цилиндра расположены с двух сторон от заряженной плоскости.



Если высота цилиндра мала, то потоком через боковую поверхность можно пренебречь. Тогда

$$\Phi \approx \Phi_{S_2} + \Phi_{S_1} = E_{2n}S - E_{1n}S,$$

где минус в последнем выражении вызван тем, что внешняя нормаль к цилиндру на площадке S_1 противоположна выбранному направлению нормали к заряженной плоскости $\vec{n} = \vec{n}_{1\to 2}$.

С другой стороны, тот же поток по теореме Гаусса равен

$$\Phi = 4\pi Q = 4\pi\sigma S.$$

Сравнивая два выражения для потока Φ, получим

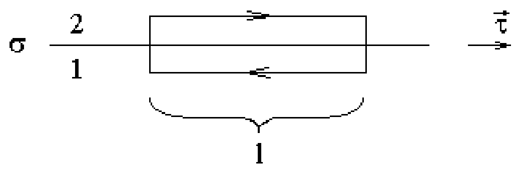
$$E_{2n}S - E_{1n}S = 4\pi\sigma S \qquad =>$$

$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma,$$

где нормаль к границе $\vec{n}$ смотрит из объема 1 в объем 2.

Рассмотрим теперь тангенциальную (по касательной к поверхности) составляющую поля $\vec{E}$ при переходе через заряженную границу.

Рассмотрим прямоугольный контур в плоскости перпендикулярной заряженной поверхности.



Если высота прямоугольника мала, то вклад в циркуляцию вертикальных отрезков пренебрежимо мал. Тогда

$$\Gamma_E \approx \Gamma_2 + \Gamma_1 = E_{2l} \cdot l + E_{1l} \cdot l = E_{2\tau} l - E_{1\tau} l\,,$$

где минус вызван тем, что на нижнем отрезке направление $d\vec{l}$ противоположно выбранному направлению единичного тангенциального вектора $\vec{\tau}$.

По теореме о циркуляции электростатического поля $\vec{E}$ имеем $\Gamma_E = 0$. Сравнивая равенство $\Gamma_E = 0$ с другим только что полученным равенством $\Gamma_E = E_{2\tau} l - E_{1\tau} l$, находим:

$$E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0\,.$$

Здесь $\vec{\tau}$ — единичный вектор по касательной к заряженной поверхности.

Экзамен. Три формы электростатической теоремы Гаусса и теоремы о циркуляции.

$$\begin{cases} \oint\limits_S \left(\vec{E}, d\vec{S}\right) = 4\pi Q \\ div\left(\vec{E}\right) = 4\pi\rho \\ E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma \end{cases}$$ — электростатическая теорема Гаусса в интегральной, дифференциальной формах и для границы раздела.

$$\begin{cases} \oint\limits_l E_l dl = 0 \\ rot\left(\vec{E}\right) = 0 \\ E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \end{cases}$$ — теорема о циркуляции электростатического поля E в интегральной, дифференциальной формах и для границы раздела.

Экзамен. Поля симметричных распределений зарядов. 1. Сферическая симметрия.

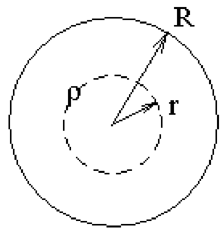
Рассмотрим задачу. Дан шар с радиусом R и объемной плотностью заряда ρ. Найти в любой точке пространства $\vec{E}$ и φ.

Решение.

Сначала найдем поле $\vec{E}$, а затем φ.

Будем искать поле $\vec{E}$ внутри шара на расстоянии r от центра шара $r \le R$.

Рассмотрим сферу с радиусом r с центром, совпадающим с центром заряженного шара.



Для сферы радиусом r применим теорему Гаусса:

$\Phi_E = 4\pi Q$ =>

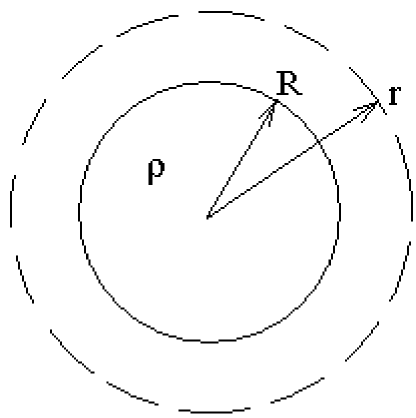
$E(r) \cdot S(r) = 4\pi \cdot \rho V(r)$ =>

$E \cdot 4\pi r^2 = 4\pi \cdot \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$ =>

$E = \frac{4}{3}\pi\rho \cdot r$ при $r \le R$

Найдем теперь E при $r \ge R$.

Рассмотрим сферу $r \ge R$:



Для сферы $r \ge R$:

$\Phi_E = 4\pi Q$ =>

$E \cdot S = 4\pi \cdot \rho V$ =>

$E \cdot 4\pi r^2 = 4\pi \cdot \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$

Здесь объем $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, так как только в этой части объема $\frac{4}{3}\pi r^3$ есть заряды. Тогда

$E = \frac{4}{3}\pi\rho \frac{R^3}{r^2}$ при $r \ge R$.

$E = \frac{Q}{r^2}$ при $r \ge R$, где Q — полный заряд шара.

Найдем теперь потенциал φ.

Сначала найдем потенциал снаружи от заряженного шара при $r \geq R$.

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\infty} E_l dl = \int_{r}^{\infty} E dr = \int_{r}^{\infty} \frac{Q}{r^2} dr = \frac{Q}{r} = \frac{4}{3}\pi\rho\frac{R^3}{r} \qquad \text{при } r \geq R.$$

Теперь найдем потенциал φ внутри шара при $r \leq R$.

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\infty} E_l dl = \int_{r}^{R} E dr + \int_{R}^{\infty} E dr = \int_{r}^{R} \frac{4}{3}\pi\rho \cdot r dr + \varphi(R) =$$

$$= \frac{2}{3}\pi\rho \cdot r^2 \Big|_r^R + \frac{4}{3}\pi\rho R^2 = 2\pi\rho R^2 - \frac{2}{3}\pi\rho r^2 \quad =>$$

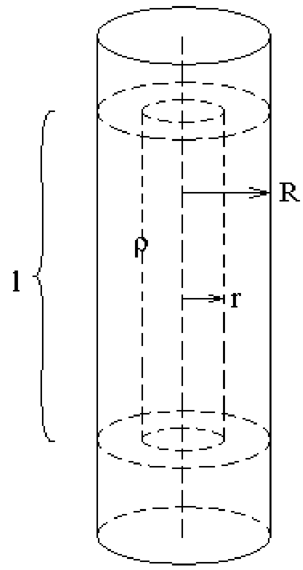
$$\varphi = 2\pi\rho R^2 - \frac{2}{3}\pi\rho r^2 \text{ при } r \leq R.$$

Экзамен. Поля симметричных распределений зарядов. 2. Цилиндрическая симметрия.

Задача. Дан бесконечно длинный цилиндр радиуса R с плотностью заряда ρ. Найти поле $\vec{E}$.

Решение.

Чтобы найти поле E внутри заряженного цилиндра рассмотрим применение теоремы Гаусса к соосному цилиндру с радиусом $r \leq R$ и длиной l.



$$\Phi_E = 4\pi Q$$

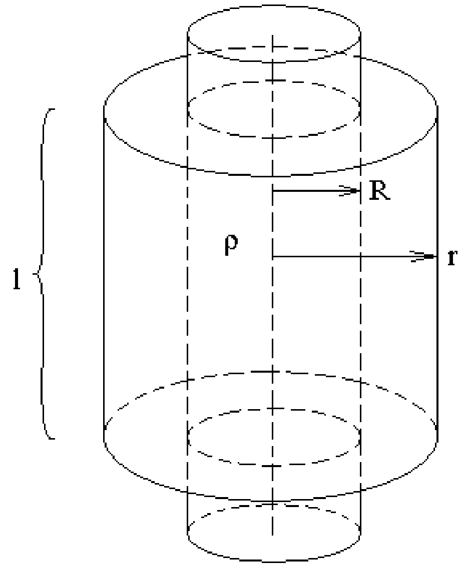
$$E \cdot S = 4\pi \cdot \rho V$$

$$E \cdot 2\pi r l = 4\pi\rho \cdot \pi r^2 l$$

$$E = 2\pi\rho \cdot r \qquad \text{при } r \leq R.$$

Найдем теперь поле $\vec{E}$ снаружи заряженного цилиндра при $r \geq R$.

Рассмотрим цилиндр с радиусом $r \geq R$ и высотой l.



$\Phi_E = 4\pi Q$

$E \cdot S = 4\pi \cdot \rho V$

$E \cdot 2\pi rl = 4\pi\rho \cdot \pi R^2 l$

Здесь объем $V = \pi R^2 l$, так как только в этой части объема $\pi r^2 l$ есть заряды. Тогда

$$E = 2\pi\rho \frac{R^2}{r} \qquad \text{при } r \geq R.$$

Факультативная вставка.

Попробуем найти потенциал φ.

Пусть точка наблюдения находится снаружи заряженного цилиндра $r \geq R$.

$$\varphi(\vec{r}) = \int_r^\infty E_l \cdot dl = \int_r^\infty E \cdot dr = \int_r^\infty 2\pi\rho \frac{R^2}{r} \cdot dr = 2\pi\rho R^2 \cdot \int_r^\infty \frac{dr}{r} = 2\pi\rho R^2 \cdot \ln(r)\Big|_r^\infty = \infty$$

Интеграл расходится, так как $\ln(r) \xrightarrow[r\to\infty]{} \infty$.

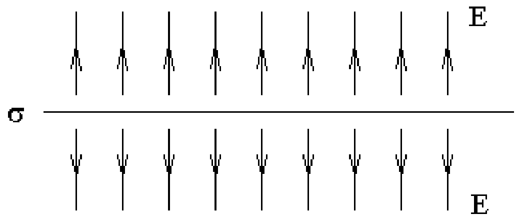
В реальном опыте потенциал не будет бесконечным, так как не бывает бесконечно длинных заряженных цилиндров.

Если h — длина заряженного цилиндра, то при $r >> h$ цилиндр выглядит, как точечный заряд. Тогда

$$E \approx \frac{Q}{r^2} \qquad => \qquad \varphi \approx \frac{Q}{r}, \qquad \text{где } Q = \rho V = \rho \cdot \pi R^2 h.$$

Экзамен. Поля симметричных распределений зарядов. 3. Плоская симметрия.

Бесконечная заряженная плоскость создает напряженность поля $E = 2\pi\sigma$ с каждой стороны от плоскости:



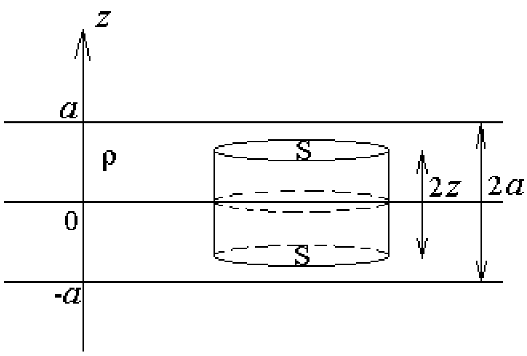
Это можно доказать, опираясь только на симметрию задачи и на скачок поля $\vec{E}$ при переходе через заряженную поверхность: $E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma$.

Задача. Дан бесконечный слой толщиной $2a$ с плотностью заряда ρ. Найти поле $\vec{E}$.

Решение.

Сначала поищем напряженность внутри заряженного слоя при $|z| \le a$.

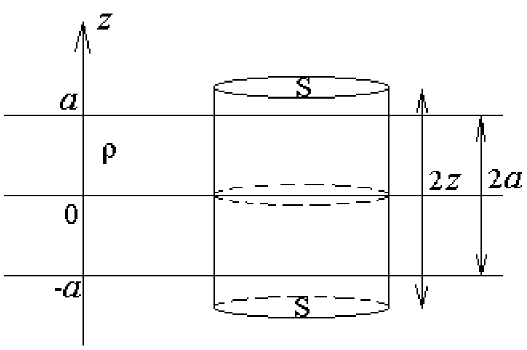
Применим теорему Гаусса к цилиндру с площадью основания S и высотой $2z$. Пусть цилиндр симметрично расположен относительно заряженного слоя.



$\Phi_E = 4\pi Q$ => $2ES = 4\pi\rho V$ => $2ES = 4\pi\rho \cdot 2zS$ =>

$E_z = 4\pi\rho z$ при $|z| \le a$, где ось z направлена перпендикулярно заряженному слою.

Теперь поищем напряженность снаружи заряженного слоя при $|z| \ge a$.



$\Phi_E = 4\pi Q$ => $2ES = 4\pi\rho V$ => $2ES = 4\pi\rho \cdot 2aS$ =>

$E = 4\pi\rho a$ при $|z| \ge a$, где ось z направлена перпендикулярно заряженному слою.

Экзамен. Дифференциальное уравнение для потенциала.

$$4\pi\rho = div\left(\vec{E}\right) = div\left(-\vec{\nabla}\varphi\right) = -\left(\vec{\nabla},\vec{\nabla}\varphi\right) = -\left(\vec{\nabla},\vec{\nabla}\right)\varphi = -\Delta\varphi$$

$\Delta \equiv \left(\vec{\nabla},\vec{\nabla}\right) = \nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа или лапласиан.

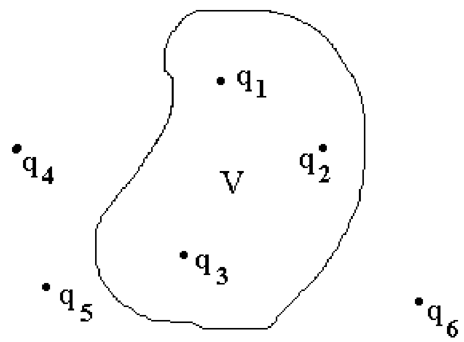
Тогда $\Delta\varphi = -4\pi\rho$ — уравнение Пуассона — это и есть дифференциальное уравнение для потенциала φ.

Если $\rho = 0$, то

$\Delta\varphi = 0$ — уравнение Лапласа — уравнение для потенциала в области без зарядов.

Факультатив. Понятие о краевой задаче электростатики.

Рассмотрим систему зарядов и некоторый объем V. Пусть одна часть зарядов находится внутри объема V, а другая — снаружи.



Если известно расположение всех зарядов, то потенциал в любой точке найти легко:

$$\varphi\left(\vec{r}\right) = \sum_i \frac{q_i}{\left|\vec{r} - \vec{r}_i\right|}$$

Пусть расположение зарядов известно только внутри объема V, но не известно за его пределами.

Какое условие для потенциала на границе объема нужно знать, чтобы можно было единственным образом найти потенциал внутри объема?

В этом и состоит краевая задача электростатики.