Экзамен. Краевая задача электростатики. 1. Задача Дирихле.

Уравнение $\Delta\varphi = -4\pi\rho$ имеет единственное решение в объеме V, если в каждой точке границы S объема V задан потенциал $\varphi(\vec{r})\big|_{\vec{r}\in S} \equiv \varphi\big|_S$.

Подразумевается, что в каждой точке внутри объема V задана плотность зарядов $\rho(\vec{r})$.

Экзамен. Краевая задача электростатики. 2. Задача Неймана.

Уравнение $\Delta\varphi = -4\pi\rho$ имеет единственное решение в объеме V, если в каждой точке границы S задана производная $\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S$ от потенциала по нормали к границе и хотя бы в одной точке границы задан потенциал.

Если потенциал не задан ни в одной точке границы, то решение единственное с точностью до произвольного слагаемого в виде константы.

Экзамен. Краевая задача электростатики. 3. Краевая задача с границами в виде проводников.

Уравнение $\Delta\varphi = -4\pi\rho$ имеет единственное решение в объеме V, если каждая граница объема — проводник, на каждой границе задан полный заряд Q_i и хотя бы в одной точке границы задан потенциал.

Если потенциал не задан ни в одной точке границы, то решение единственное с точностью до произвольного слагаемого в виде константы.

Факультатив. К вопросу о существовании решения краевой задачи электростатики.

Дифференциальное уравнение Пуассона $\Delta\varphi = -4\pi\rho$ с заданным потенциалом на границе $\varphi\big|_S$ можно преобразовать к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Для этих интегральных уравнений существование решения доказано, поэтому решение краевой задачи Дирихле всегда существует.

Решения краевой задачи Неймана и задачи с проводниками существуют не всегда.

Подробнее:
http://igor-krylov.ru/Lectures/ElectroMag/Puasson_and_Fredgolm.pdf
или
http://igor-krylov.narod.ru/Lectures/ElectroMag/Puasson_and_Fredgolm.pdf
или
http://www.phys.spbu.ru/content/File/Library/studentlectures/Krylov/Puasson_i_Fredgolm.pdf

Экзамен. Краевая задача электростатики. 4. Краевая задача общего вида.

Уравнение $\Delta\varphi = -4\pi\rho$ имеет единственное решение в объеме V, если на каждой границе объема V задано одно из условий вида 1, 2 или 3 и хотя бы в одной точке границы задан потенциал.

Если потенциал не задан ни в одной точке границы, то решение единственное с точностью до произвольного слагаемого в виде константы.

<u>Факультатив. Доказательство единственности решения краевой задачи электростатики.</u>

Предположим, что есть два решения φ_1 и φ_2, и для каждого из них выполнены граничные условия. Рассмотрим напряженности $\vec{E}_i = -\vec{\nabla}\varphi_i$ соответствующие двум потенциалам.

Докажем, что два решения φ_1 и φ_2 тождественны. Для этого потребуется доказать, что в каждой точке объема $\vec{E}_1 - \vec{E}_2 = 0$, тогда из этого равенства будет следовать $\vec{\nabla}\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) = 0$, так как $\vec{E}_i = -\vec{\nabla}\varphi_i$. Кроме того, в каждой из четырех краевых задач хотя бы в одной точке границы выполнено условие $\varphi_1\big|_S = \varphi_2\big|_S$. Откуда следует, что в одной точке границы $\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\big|_S = 0$. И так, производная во всех точках объема равна нулю $\vec{\nabla}\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) = 0$, а сама функция равна нулю $\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\big|_S = 0$ хотя бы в одной точке. Тогда функция во всех точках объема равна нулю $\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\big|_V = 0$ или $\varphi_1\big|_V = \varphi_2\big|_V$, следовательно, два решения φ_1 и φ_2 тождественны.

Вернемся к доказательству равенства $\vec{E}_1 - \vec{E}_2 = 0$ для всех точек объема. С этой целью докажем два равенства:

$$\begin{cases} \int\limits_V \left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2, \vec{E}_1 - \vec{E}_2\right) dV = \oint\limits_S \left(\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\vec{\nabla}\left(\varphi_1 - \varphi_2\right), d\vec{S}\right) \\ \oint\limits_S \left(\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\vec{\nabla}\left(\varphi_1 - \varphi_2\right), d\vec{S}\right) = 0 \end{cases}.$$

Если мы их докажем, то получим $\int\limits_V \left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2, \vec{E}_1 - \vec{E}_2\right) dV = 0$ или $\int\limits_V \left|\vec{E}_1 - \vec{E}_2\right|^2 dV = 0$, то есть $\vec{E}_1 - \vec{E}_2 = 0$ в каждой точке объема.

Докажем сначала первое равенство системы.

$\oint\limits_S \left(\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\vec{\nabla}\left(\varphi_1 - \varphi_2\right), d\vec{S}\right) = \int\limits_V div\left(\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\vec{\nabla}\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\right) \cdot dV$ - по теореме Гаусса-Остроградского для векторного поля $\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\vec{\nabla}\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)$. Тогда

$$\oint\limits_S \left(\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\vec{\nabla}\left(\varphi_1 - \varphi_2\right), d\vec{S}\right) = \int\limits_V div\left(\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\vec{\nabla}\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\right) \cdot dV = \int\limits_V \left(\vec{\nabla}, \left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\vec{\nabla}\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\right) \cdot dV =$$

Левую набла в последнем выражении — это производная от произведения $(\varphi_1 - \varphi_2)$ на $\vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2)$. Тогда цепочку равенств можно продолжить, как производную от первого сомножителя на нетронутый второй, плюс производная от второго сомножителя на нетронутый первый:

$$= \int\limits_V \left(\vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2), \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2)\right) \cdot dV + \int\limits_V (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \left(\vec{\nabla}, \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2)\right) \cdot dV =$$

$$= \int\limits_V \left(\vec{\nabla}\varphi_1 - \vec{\nabla}\varphi_2, \vec{\nabla}\varphi_1 - \vec{\nabla}\varphi_2\right) \cdot dV + \int\limits_V (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \left(\vec{\nabla}, \vec{\nabla}\right)(\varphi_1 - \varphi_2) \cdot dV =$$

$$\int\limits_V \left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2, \vec{E}_1 - \vec{E}_2\right) \cdot dV + \int\limits_V (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \Delta(\varphi_1 - \varphi_2) \cdot dV =$$

$$= \int\limits_V \left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2, \vec{E}_1 - \vec{E}_2\right) \cdot dV + \int\limits_V (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot (\Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2) \cdot dV =$$

$$= \int\limits_V \left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2, \vec{E}_1 - \vec{E}_2\right) \cdot dV + \int\limits_V (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \left(-4\pi\rho - (-4\pi\rho)\right) \cdot dV =$$

$$= \int\limits_V \left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2, \vec{E}_1 - \vec{E}_2\right) \cdot dV .$$

Таким образом, первое равенство системы доказано.

Докажем теперь второе равенство системы:

$$\oint\limits_S \left((\varphi_1 - \varphi_2)\vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2), d\vec{S}\right) = 0 .$$

Сначала преобразуем левую часть равенства к более удобному виду. Рассмотрим подынтегральное выражение:

$$\left((\varphi_1 - \varphi_2)\vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2), d\vec{S}\right) = (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \left(\vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2), d\vec{S}\right) =$$

$$(\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \left(\vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2)\right)_{d\vec{S}} \cdot dS = (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \left(\vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2)\right)_{\vec{n}} \cdot dS =$$

$$(\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \frac{\partial(\varphi_1 - \varphi_2)}{\partial n} \cdot dS = (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\right) \cdot dS$$

И так, нужно доказать равенство

$$\oint\limits_S (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\right) \cdot dS = 0,$$

докажем его отдельно для краевой задачи каждого вида.

1. Рассмотрим доказательство равенства $\oint\limits_S (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\right) \cdot dS = 0$ для задачи Дирихле, в которой $\varphi_1\big|_S = \varphi_2\big|_S$ в любой точке границы S.

$\varphi_1\big|_S = \varphi_2\big|_S$ => $(\varphi_1 - \varphi_2)\big|_S = 0$ => Первый сомножитель $(\varphi_1 - \varphi_2)$ под интегралом в любой точке границы, по которой и идет интегрирование, равен нулю. Следовательно, весь интеграл равен нулю, и равенство доказано для задачи Дирихле.

2. Рассмотрим теперь доказательство равенства $\oint_S (\varphi_1 - \varphi_2)\cdot\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\right)\cdot dS = 0$ для задачи Неймана.

В краевой задаче Неймана $\left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\right|_S = \left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\right|_S$, следовательно, на поверхности S второй сомножитель подынтегрального выражения тождественно равен нулю, и интеграл равен нулю.

3. Теперь рассмотрим доказательство равенства $\oint_S (\varphi_1 - \varphi_2)\cdot\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\right)\cdot dS = 0$ для задачи с границами в виде проводников.

Вся поверхность проводника в электростатике имеет одинаковый потенциал — является эквипотенциальной поверхностью. Это утверждение будет доказано чуть позднее, когда мы будем рассматривать свойства проводников. В символьном виде это может быть записано, как $\left.\varphi\right|_{S_i} = const_i$, где S_i — поверхность i-го проводника границы, если граница многосвязная.

Тогда $\left.(\varphi_1 - \varphi_2)\right|_{S_i} = const_i$

Этот сомножитель, как постоянную величину, можно вынести из под интеграла по границе i-го проводника:

$$\oint_{S_i} (\varphi_1 - \varphi_2)\cdot\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\right)\cdot dS = (\varphi_1 - \varphi_2)\cdot\oint_{S_i}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\right)dS =$$
$$= (\varphi_1 - \varphi_2)\cdot\oint_{S_i}\left(-E_{1n} + E_{2n}\right)\cdot dS$$

Чуть позднее, рассматривая свойства проводников, мы получим, что над поверхностью проводника $E_n = 4\pi\sigma$, где σ — поверхностная плотность зарядов на проводнике. Тогда $-E_{1n} + E_{2n} = -4\pi\sigma_1 + 4\pi\sigma_2$ =>

$$(\varphi_1 - \varphi_2)\cdot\oint_{S_i}\left(-E_{1n} + E_{2n}\right)\cdot dS = (\varphi_1 - \varphi_2)\cdot\oint_{S_i}\left(-4\pi\sigma_1 + 4\pi\sigma_2\right)\cdot dS =$$
$$= 4\pi\cdot(\varphi_1 - \varphi_2)\cdot\left(\oint_{S_i}\sigma_2 dS - \oint_{S_i}\sigma_1 dS\right) = 4\pi\cdot(\varphi_1 - \varphi_2)\cdot(Q_{2i} - Q_{1i}).$$

Здесь Q_{1i} и Q_{2i} — полный заряд на i-ом проводнике в первом и втором решениях. Поскольку в краевой задаче с проводниками заряд на каждом проводнике задан, получаем $Q_{2i} = Q_{1i}$. Следовательно, интеграл равен нулю и для этой краевой задачи.

Для краевой задачи общего вида равенство $\oint_S (\varphi_1 - \varphi_2)\cdot\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\right)\cdot dS = 0$ будет выполнено для каждой границы, так как в краевой задаче общего вида на каждой границе выполнено одно из трех предыдущих краевых условий.

В результате равенство $\oint\limits_S \left((\varphi_1 - \varphi_2) \vec{\nabla} (\varphi_1 - \varphi_2), d\vec{S} \right) = 0$ доказано для краевой задачи любого из четырех видов, и единственность решения краевой задачи электростатики доказана для этих четырех видов задач.

<u>Экзамен. Основные свойства проводников в электростатическом поле.</u>

Проводник — материал, в котором под действием электрического поля $\vec{E}$ течет электрический ток.

Свойства проводников.

1. $\vec{E}_{внутри} = 0$ — поле $\vec{E}$ внутри проводника отсутствует.

Докажем это утверждение методом "от противного". Предположим, что $\vec{E}_{внутри} \neq 0$ и получим противоречие.

И действительно. Если электростатическое поле внутри неподвижного проводника не равно нулю $\vec{E}_{внутри} \neq 0$, то по определению проводника в нем течет ток, тогда заряды движутся, и не выполняются условия электростатики. Полученное противоречие доказывает, что поле $\vec{E}_{внутри}$ внутри проводника равно нулю.

Если же отойти от рассмотрения электростатики, тогда, если в проводнике течет ток, то в проводнике есть отличное от нуля электрическое поле. Приложенное к проводнику напряжение создает в нем электрический ток.

2. $0 = \vec{E}_{внутри} = -\vec{\nabla} \varphi_{внутри} = 0$ => $\varphi_{внутри} = const$ - каждый проводник в электростатике эквипотенциален.

3. $\begin{Bmatrix} 4\pi\rho_{внутри} = div\left(\vec{E}_{внутри}\right) \\ \vec{E}_{внутри} = 0 \end{Bmatrix}$ => $\rho_{внутри} = 0$ =>

В электростатике нескомпенсированные заряды проводника могут находиться только на его поверхности.

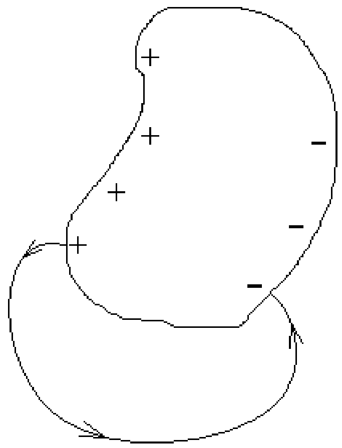
4. $\begin{Bmatrix} E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma \\ \vec{E}_{внутри} = 0 \end{Bmatrix}$ => $E_n = 4\pi\sigma$ - нормальная составляющая поля $\vec{E}$ над поверхностью проводника с поверхностной плотностью заряда σ, где $\vec{n}$ — нормаль, направленная из проводника наружу.

5. $\begin{Bmatrix} E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \\ \vec{E}_{внутри} = 0 \end{Bmatrix}$ => $E_\tau = 0$ - тангенциальная составляющая поля $\vec{E}$ над поверхностью проводника отсутствует.

6. (Факультативно) В электростатике невозможно, чтобы линия поля $\vec{E}$ начиналась и заканчивалась на одном и том же проводнике, так как вдоль

линии поля $\vec{E}$ потенциал понижается, а поверхность проводника эквипотенциальна.

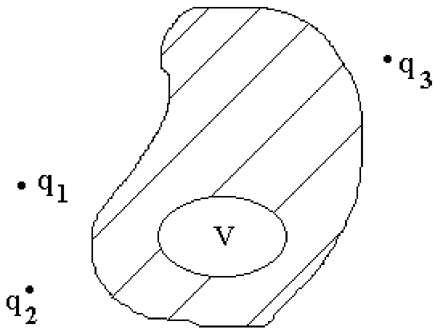
Невозможно:



Экзамен. Экранирование электростатического поля проводником.

Переменное электромагнитное поле тоже экранируется, но не полностью.

Если в проводнике есть полость без зарядов, то внутри полости $\vec{E}=0$ независимо от того заряжен ли проводник и есть ли заряды снаружи проводника.



Рассмотрим объем полости V внутри тела проводника. Граница S объема V эквипотенциальна, так как является поверхностью проводника. Пусть потенциал этой поверхности равен φ_0. Тогда $\varphi\big|_S=\varphi_0$.

Придумаем в объеме V решение для уравнения $\Delta\varphi=-4\pi\rho$. Придумаем решение в виде постоянного потенциала $\varphi(\vec{r})\big|_V=\varphi_0$.

Это решение удовлетворяет условию краевой задачи Дирихле $\varphi\big|_S=\varphi_0$. Это решение удовлетворяет и уравнению Пуассона $\Delta\varphi=-4\pi\rho$ в объеме V, так как в этом объеме нет зарядов: $\rho=0$, и так как производные от постоянного потенциала φ_0 равны нулю: $\Delta\varphi=0$.

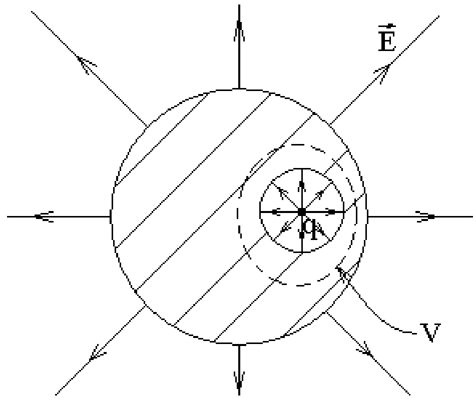
Из единственности решения краевой задачи Дирихле следует, что другого решения для потенциала в полости быть не может. Значит, придуманное нами решение для потенциала в объеме полости V и будет настоящим решением для потенциала в полости.

$$\varphi(\vec{r})\big|_V = \varphi_0 = const \qquad => \qquad \vec{E} = 0$$

Внутри полости поле $\vec{E}$ отсутствует или, что то же самое, проводник экранирует электростатическое поле.

Факультатив. Заряд внутри полости проводника.

Рассмотрим задачу: пусть есть незаряженный проводящий шар, внутри шара — сферическая полость, в центре полости точечный заряд. Найти поле $\vec{E}$ везде.



Сначала докажем, что на внутренней поверхности проводника, на поверхности полости, соберется заряд $-q$. Для этого применим теорему Гаусса к пунктирной границе S объема V. Все точки поверхности S находятся внутри объема проводника. Следовательно, в точках границы S отсутствует поле $\vec{E}$. Тогда и поток поля $\vec{E}$ через поверхность S равен нулю: $\Phi_E = 0$. С учетом теоремы Гаусса $\Phi_E = 4\pi Q$. Тогда $Q = 0$, сумма зарядов внутри поверхности S равна нулю. Внутри объема проводника зарядов нет. Следовательно, если в полости заряд q, то на границе полости находится заряд $-q$.

Проводник не заряжен. Если на поверхности полости находится заряд $-q$, то на внешней поверхности проводника должен быть суммарный заряд q.

Теперь можно решать две совершенно независимые задачи.

В 1-ой задаче рассмотрим объем полости V. В этой задаче в центре объема V находится точечный заряд q. Граница объема — это поверхность проводника, на которой задан полный заряд $Q = -q$. Ни в одной точке границы не задан потенциал, поэтому задача о потенциале в объеме полости имеет единственное решение с точностью до неизвестного слагаемого. Задача сферически симметрична. Поэтому поле в объеме полости можно найти с помощью теоремы Гаусса, рассмотрев сферу с произвольным радиусом r меньше радиуса полости. Решение — поле точечного заряда $E = \dfrac{q}{r^2}$.

Во второй задаче рассмотрим объем снаружи проводника. На границе этого объема задан заряд q, и граница является поверхностью проводника. Снаружи этой поверхности зарядов нет. Задача сферически симметрична. Ее решение можно найти с помощью теоремы Гаусса, рассмотрев сферу с произвольным радиусом r больше радиуса проводящего шара. Решение —

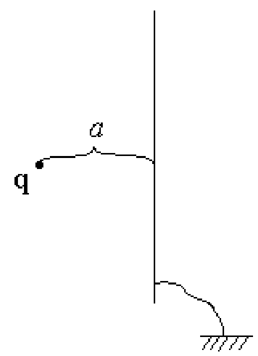
поле точечного заряда $E = \dfrac{q}{r^2}$. Заметим, что центр симметрии 2-ой задачи не совпадает с центром симметрии 1-ой задачи. И еще — если полость в проводящем шаре имеет любую другую форму, то поле $\vec{E}$ снаружи проводящего шара не изменится.

Обобщая рассмотренную задачу, приходим к следующему выводу. Если есть незаряженный проводник, в полости которого есть какие-то заряды, то электростатическое поле снаружи проводника такое же, как будто полости нет, и проводник заряжен зарядами полости.

<u>**Экзамен. Метод изображений. 1. Точечный заряд над проводящей заземленной плоскостью.**</u>

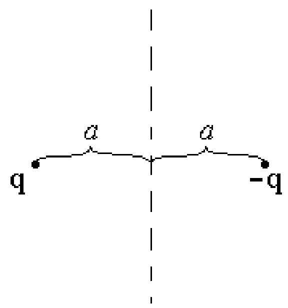
Рассмотрим задачу.

Дан точечный заряд q, расположенный над заземленной проводящей плоскостью на расстоянии a. Найти потенциал и напряженность поля в полупространстве над плоскостью.



Когда в задаче говориться, что проводник заземлен, то подразумевается, что он поддерживается под нулевым потенциалом. На самом деле электрический потенциал Земли отличен от нуля, но чтобы поставить опыт, в котором это отличие проявляется нужно очень постараться. Поэтому и в задачах и на опыте можно считать, что соединение проводника с Землей обнуляет его потенциал.

Сравним эту задачу с другой, в которой нет проводящей плоскости, а вместо нее есть заряд-изображение $-q$, расположенный симметрично заряду q относительно плоскости.



Заряд-изображение $-q$ вместе с зарядом q создают нулевой потенциал в любой точке пунктирной плоскости. Следовательно, придуманный заряд-изображение вместе с реальным зарядом создают нужный потенциал на границе объема V, в котором ищут решение для потенциала. Согласно единственности решения краевой задачи Дирихле в левой половине пространства потенциал в этих двух задачах одинаковый.

В результате поле $\vec{E}$ и поле φ в левой половине пространства — это поля двух точечных зарядов q и $-q$.