Факультатив. Почему в задачах заряды на пластинах конденсатора всегда равны по величине и противоположны по знаку (продолжение)**.**

Если на пластинах конденсатора одновременно отличны от нуля и разность и сумма потенциалов, то, объединяя равенства (6.2) и (6.3), получим:

$$\begin{cases} q_1 = C\cdot(\varphi_1-\varphi_2) + C_0\cdot\dfrac{\varphi_1+\varphi_2}{4} \\ q_2 = -C\cdot(\varphi_1-\varphi_2) + C_0\cdot\dfrac{\varphi_1+\varphi_2}{4} \end{cases} \quad (6.4).$$

Возникает вопрос, почему можно объединить равенства, если, например, φ_1 в одной задаче имеет одну величину, а в другой — другую? Дело в том, что $\varphi_1-\varphi_2$ можно рассматривать, как единый символ. Аналогично $\varphi_1+\varphi_2$. В одной задаче есть только $\varphi_1-\varphi_2$, в другой — только $\varphi_1+\varphi_2$, а в суммарной задаче есть и то и другое.

Из (6.4) при условии $C_0 \ll C$ следует

$$\begin{cases} q_1 \approx C\cdot(\varphi_1-\varphi_2) = CU \\ q_2 \approx -C\cdot(\varphi_1-\varphi_2) = -CU \end{cases} \quad => \quad q_2 \approx -q_1$$ практически при любых значениях φ_1 и φ_2.

Если мы все же поместим на пластины конденсатора такие заряды, что $q_1+q_2 \neq 0$, то обе пластины конденсатора окажутся под огромным и почти одинаковым потенциалом относительно Земли.

И действительно, из

$$\begin{cases} q_1 = C\cdot(\varphi_1-\varphi_2) + C_0\cdot\dfrac{\varphi_1+\varphi_2}{4} \\ q_2 = -C\cdot(\varphi_1-\varphi_2) + C_0\cdot\dfrac{\varphi_1+\varphi_2}{4} \end{cases}$$

следует

$$\begin{cases} \varphi_1 = \dfrac{q_1+q_2}{C_0} + \dfrac{q_1-q_2}{4C} \approx \dfrac{q_1+q_2}{C_0} \\ \varphi_2 = \dfrac{q_1+q_2}{C_0} - \dfrac{q_1-q_2}{4C} \approx \dfrac{q_1+q_2}{C_0} \end{cases},$$

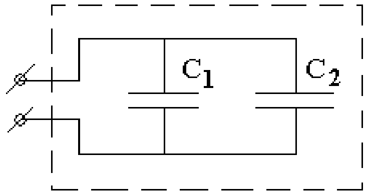
где при малой величине C_0 и $q_1+q_2 \neq 0$ потенциалы φ_1 и φ_2 окажутся очень большими.

Сравнивая (6.1) и (6.4), получим

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} C+\dfrac{C_0}{4} & -C+\dfrac{C_0}{4} \\ -C+\dfrac{C_0}{4} & C+\dfrac{C_0}{4} \end{pmatrix}.$$

Экзамен. Электрическая емкость параллельного и последовательного соединения конденсаторов.

Пусть два конденсатора с емкостями C_1 и C_2 соединены параллельно и помещены в черный ящик, из которого торчат два провода:



Если не знать, что в черном ящике два конденсатора, а не один, то емкость этого одного конденсатора можно найти опытным путем.

Приложим к проводам напряжение U и измерим, какой заряд q протечет по проводам. Тогда $C = \dfrac{q}{U}$.

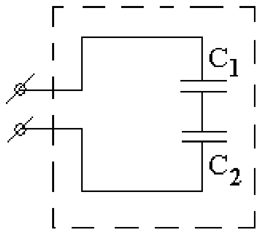
При параллельном соединении конденсаторов $\begin{cases} U = U_1 = U_2 \\ q = q_1 + q_2 \end{cases}$. Тогда

$$C = \frac{q}{U} = \frac{q_1 + q_2}{U} = \frac{q_1}{U} + \frac{q_2}{U} = C_1 + C_2 \qquad => \qquad C = C_1 + C_2.$$

Емкости параллельно соединенных конденсаторов складываются. Аналогично для большего числа параллельно соединенных конденсаторов:

$C = \sum\limits_i C_i$ — емкость при параллельном соединении конденсаторов.

Рассмотрим теперь последовательное соединение двух конденсаторов.



При последовательном соединении конденсаторов $\begin{cases} U = U_1 + U_2 \\ q = q_1 = q_2 \end{cases}$. Тогда

$$\frac{1}{C} = \frac{U}{q} = \frac{U_1 + U_2}{q} = \frac{U_1}{q} + \frac{U_2}{q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \qquad => \qquad \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}.$$

При последовательном соединении конденсаторов складываются обратные емкости. Аналогично для большего числа последовательно соединенных конденсаторов:

$\frac{1}{C}=\sum_i \frac{1}{C_i}$, где C — емкость при последовательном соединении конденсаторов.

Экзамен. Энергия взаимодействия зарядов.

Рассмотрим пару зарядов:

Рассмотрим энергию второго заряда в поле первого заряда:

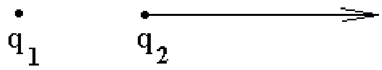
$W_2 = q_2\varphi_2 = q_2 \frac{q_1}{r_{12}}$.

Найдем теперь энергию первого заряда в поле второго:

$W_1 = q_1\varphi_1 = q_1 \frac{q_2}{r_{12}}$.

Энергии равны $W_1 = W_2$. Возникает вопрос. Это две разные энергии или одна и та же?

Рассмотрим мысленный опыт:



Пусть первый заряд остается неподвижным, а второй заряд медленно уносят на бесконечность.

В этом процессе энергия первого заряда в поле второго изменяется от значения $\frac{q_1 q_2}{r_{12}}$ до нуля, но работа над зарядом q_1 не совершается, так как он остается неподвижным.

По закону изменения энергии работа равна изменению энергии. Чтобы избежать противоречия нужно считать, что энергия $\frac{q_1 q_2}{r_{12}}$ не принадлежит ни одному, ни другому заряду, а принадлежит сразу двум зарядам в том смысле, что работа над любым из двух зарядом изменяет эту энергию. Чтобы подчеркнуть эту особенность энергию $\frac{q_1 q_2}{r_{12}}$ называют "энергией взаимодействия".

Для энергии взаимодействия удобна симметричная запись:

$W = q_1\varphi_1 = q_2\varphi_2 = \frac{1}{2}\left(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2\right)$.

Рассмотрим теперь систему зарядов $\{q_i\}$.

Сила, действующая на каждый заряд, равна сумме сил парных взаимодействий этого заряда с каждым из остальных. При перемещении этого заряда работа электрических сил тоже будет равна сумме работ парных взаимодействий. Тогда и энергия заряда равна сумме энергий его парных взаимодействий.

Энергия заряда q_i в поле остальных зарядов равна $W = q_i\varphi_i$, где φ_i — потенциал поля остальных зарядов в точке расположения заряда q_i.

Энергия всех зарядов равна сумме энергий $W = \sum_i q_i\varphi_i$, но в этом выражении энергия взаимодействия каждой пары зарядов учтена дважды, как энергия одного заряда и как энергия второго заряда. Тогда энергия взаимодействия системы зарядов вдвое меньше суммы энергий всех зарядов.

$W = \frac{1}{2}\sum_i q_i\varphi_i$ — энергия взаимодействия системы зарядов, где φ_i — потенциал в точке расположения i-ого заряда, создаваемый остальными зарядами системы.

Для непрерывного распределения зарядов

$$W = \frac{1}{2}\int_V \varphi\,\rho dV .$$

В системе СИ оба выражения для энергии такие же, как в системе СГС Гаусса.

Экзамен. Энергия электрического поля.

Для неподвижных зарядов энергия электрического поля — это то же самое, что и энергия взаимодействия зарядов. Для движущихся зарядов формула для энергии взаимодействия зарядов не верна, но формула для энергии поля, как предполагают, справедлива и для переменных полей. Все следствия из этого предположения согласуются с опытом.

$$W = \frac{1}{2}\sum_i \varphi_i q_i = \frac{1}{2}\int_V \varphi\, dq = \frac{1}{2}\int_V \varphi\,\rho dV = \frac{1}{2}\int_V \varphi \frac{1}{4\pi} div\left(\vec{E}\right) dV = \frac{1}{8\pi}\int_V \varphi\left(\vec{\nabla},\vec{E}\right) dV .$$

Здесь набла $\vec{\nabla}$ — это производная. Возьмем последний интеграл по частям, перебросив производную с одного сомножителя ($\vec{E}$) на другой (φ):

$$\frac{1}{8\pi}\int_V \varphi\left(\vec{\nabla},\vec{E}\right) dV = \frac{1}{8\pi}\oint_S \varphi\left(\vec{E},d\vec{S}\right) - \frac{1}{8\pi}\int_V \left(\vec{\nabla}\varphi,\vec{E}\right) dV .$$

Здесь первое слагаемое — это внеинтегральный член, просуммированный по краям области интегрирования, при этом сохранена векторная форма скалярного произведения. Второе слагаемое имеет прежнюю векторную форму, но производная берется от другого сомножителя. Доказательство справедливости этого интегрирования по частям в трехмерном пространстве оставим математикам.

Подставим во второй интеграл $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$ и получим:

$$W=\frac{1}{8\pi}\oint\limits_S\varphi\left(\vec{E},d\vec{S}\right)+\int\limits_V\frac{E^2}{8\pi}dV.$$

Устремим объем к бесконечности. Мы можем это сделать, так как исходный интеграл $\int\limits_V\varphi\rho dV$ можно брать по любому объему, который охватывает все заряды. Чуть позднее докажем, что поверхностный интеграл стремится к нулю при стремлении объема интегрирования к бесконечности. Тогда

$W=\int\limits_{V=\infty}\frac{E^2}{8\pi}dV$ - энергия электрического поля.

$w\equiv\frac{dW}{dV}$ - определение объемной плотности энергии. Тогда

$w=\frac{E^2}{8\pi}$ - объемная плотность энергии электрического поля.

В системе СИ $w=\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$.

Факультатив. $\oint\limits_S\varphi\left(\vec{E},d\vec{S}\right)\to 0$ **при** $V\to\infty$**.**

Докажем, что $\oint\limits_S\varphi\left(\vec{E},d\vec{S}\right)\to 0$ при $V\to\infty$.

Пусть S - большая сфера, радиус которой гораздо больше расстояний между зарядами. И выберем положение сферы так, чтобы все заряды оказались вблизи центра сферы. Тогда для наблюдателя на поверхности сферы все распределение зарядов выглядит как один точечный заряд. =>

$$\left\{\begin{aligned}\varphi\approx\frac{Q}{r}\\ E\approx\frac{Q}{r^2}\end{aligned}\right\}.$$

Откуда, с учетом того что векторы $\vec{E}$ и $d\vec{S}$ почти параллельны в каждой точке поверхности, получаем

$$\oint\limits_S\varphi\left(\vec{E},d\vec{S}\right)\approx\oint\limits_S\varphi E\,dS\approx\oint\limits_S\frac{Q}{r}\frac{Q}{r^2}\,dS=\frac{Q^2}{r^3}\oint\limits_S dS=\frac{Q^2}{r^3}4\pi r^2=\frac{4\pi Q^2}{r}\xrightarrow[V\to\infty]{}0$$

Что и требовалось доказать.

Факультатив. Рассмотрим парадокс.

Если $q_1 q_2 < 0$, то $W = \frac{q_1 q_2}{r} < 0$. Это с одной стороны. А с другой стороны, если $\frac{E^2}{8\pi} > 0$, то $W = \int\limits_{V=\infty} \frac{E^2}{8\pi} dV > 0$. С одной стороны энергия W получилась отрицательная, а с другой стороны — положительная. Противоречие.

При выводе второй формулы для энергии $W = \int\limits_{V=\infty} \frac{E^2}{8\pi} dV$ мы воспользовались равенством

$$\frac{1}{2}\sum_i \varphi_i q_i = \frac{1}{2}\int\limits_V \varphi \rho dV,$$

которое на самом деле не выполняется. Причина неравенства в том, что φ_i — потенциал в точке расположения i-го заряда, создаваемый всеми остальными зарядами кроме i-го заряда, а φ — потенциал, создаваемый всеми зарядами.

В результате выражение $W = \frac{1}{2}\sum_i q_i \varphi_i$ не содержит энергию взаимодействия каждого заряда с самим собой. Учесть эту энергию для точечных зарядов невозможно, потому что она бесконечная.

И действительно, рассмотрим один точечный заряд q. По формуле $W = \frac{1}{2}\sum_i q_i \varphi_i$ получаем, что $W = 0$, так как в сумме есть только одно слагаемое, и потенциал φ в этом слагаемом равен нулю, так как это потенциал поля остальных зарядов, которых нет.

Рассмотрим теперь для одного заряда q энергию поля по формуле $W = \int\limits_{V=\infty} \frac{E^2}{8\pi} dV$. Покажем, что энергия в этой формуле бесконечна.

Будем считать, что точечный заряд представляет собой заряженную сферу радиусом R. Найдем энергию поля в виде интеграла $W = \int\limits_{V=\infty} \frac{E^2}{8\pi} dV$, и устремим в полученном выражении радиус сферы R к нулю. Внутри сферы с радиусом R поле $\vec{E}$ равно нулю и интеграл по области $r < R$ можно не брать.

$$W = \int\limits_{V=\infty} \frac{E^2}{8\pi} dV = \frac{1}{8\pi}\int\limits_R^\infty \left(\frac{q}{r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{2}\int\limits_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{2}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_R^\infty = \frac{q^2}{2R} \quad \Rightarrow$$

$$W = \frac{q^2}{2R} \xrightarrow[R \to 0]{} \infty$$

Энергия заряженной сферы одинаково стремится к бесконечности по формуле $W = \frac{1}{2}\sum_i q_i \varphi_i$ и по формуле $W = \int\limits_{V=\infty} \frac{E^2}{8\pi} dV$ при стремлении радиуса сферы к нулю. Точечный заряд обладает бесконечной энергией взаимодействия друг с другом его частей.

Выражение $W = \frac{1}{2}\sum_i q_i \varphi_i$ не учитывает бесконечную энергию, запасенную внутри каждого точечного заряда, а выражение $W = \int\limits_{V=\infty} \frac{E^2}{8\pi} dV$ учитывает эту энергию, но обращается в бесконечность для точечных зарядов.

Факультатив. Электрон — точечный заряд.

Согласно современным представлениям протоны и нейтроны состоят из кварков, а электроны не имеют структуры и, казалось бы, должны быть точечными объектами.

Точечный заряд должен иметь бесконечную энергию электрического поля, а, следовательно, и бесконечную массу $W = mc^2$.

Масса электрона конечна, отсюда можно найти радиус электрона. Приравняем электрическую энергию заряженной сферы к энергии покоя электрона и получим радиус электрона:

$$\frac{e^2}{2r_e} = m_e c^2 \qquad =>$$

$r_e = \frac{e^2}{2m_e c^2}$ — электростатический радиус электрона, e — модуль заряда электрона, m_e — масса покоя электрона. Обычно вместо величины r_e рассматривают вдвое большую величину $r_0 = \frac{e^2}{m_e c^2}$, которую называют классическим радиусом электрона.

В системе СИ $r_e = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 m_e c^2} \approx 10^{-15}$ м, что примерно совпадает с радиусом атомного ядра.

$r_g = \frac{2\gamma m_e}{c^2} \approx 10^{-57}$ м — гравитационный радиус электрона или радиус сферы Шварцшильда для электрона. Время на сфере Шварцшильда останавливается. Если электрон сжать до шара с таким радиусом, то он превратится в черную дыру.

Факультатив. Электростатическая энергия заряженного проводника и системы проводников.

Рассмотрим энергию взаимодействия зарядов

$$W = \frac{1}{2}\sum_i q_i\varphi_i .$$

Все заряды на поверхности одного проводника имеют одинаковый потенциал. Если просуммировать эти слагаемые для *k*-го проводника, то получим $Q_k\varphi_k$, где φ_k — потенциал *k*-го проводника, Q_k — полный заряд на *k*-ом проводнике.

Тогда вместо суммы по всем точечным зарядам получим сумму по всем проводникам:

$W = \frac{1}{2}\sum_i Q_i\varphi_i$ — энергия электростатического взаимодействия системы проводников, где i — номер проводника, Q_i — заряд *i*-ого проводника, φ_i — потенциал *i*-ого проводника. В системе СИ формула выглядит также.

Для одного проводника получаем

$$W = \frac{Q\varphi}{2}.$$

В частности для проводящего шара $\varphi = \frac{Q}{R}$ => $W = \frac{Q^2}{2R}$.

Экзамен. Энергия заряженного конденсатора.

Конденсатор — это два проводника. Просуммируем выражение для энергии $W = \frac{1}{2}\sum_i Q_i\varphi_i$ по этим двум проводникам:

$$W = \frac{1}{2}\sum_i Q_i\varphi_i = \frac{1}{2}\left(q\varphi_1 + (-q)\varphi_2\right) = \frac{q}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{qU}{2}.$$

Это выражение можно заменить на эквивалентные выражения с учетом соотношения $C \equiv \frac{q}{U}$:

$$W = \frac{qU}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2}.$$

Все три выражения справедливы и в системе СИ. Последнее выражение проще запомнить:

$$W = \frac{CU^2}{2}.$$

Электрический диполь.
Экзамен. Потенциал поля точечного диполя.

Издалека любое распределение зарядов выглядит, как один точечный заряд $\varphi(\vec{r}) \approx \frac{Q}{r}$. Здесь начало координат выбрано где-то вблизи зарядов, $\vec{r}$ —

радиус-вектор точки наблюдения потенциала. К этому выражению можно сделать поправки в виде ряда по степеням $\frac{1}{r}$:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{r} + \frac{f_2(\theta,\varphi)}{r^2} + \frac{f_3(\theta,\varphi)}{r^3} + \frac{f_4(\theta,\varphi)}{r^4} + \frac{f_5(\theta,\varphi)}{r^5} + \dots$$

Слагаемые этого ряда имеют названия: потенциал точечного заряда, потенциал точечного диполя, потенциал точечного квадруполя, потенциал точечного октуполя, потенциал точечного гексадекаполя и т. д.

Точное выражение для потенциала имеет вид:

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{\left|\vec{r} - \vec{r}_i\right|}.$$

Найдем первые два слагаемых разложения этого потенциала по степеням $\frac{1}{r}$.

$\left|\vec{r}\right| >> \left|\vec{r}_i\right|$ => $\frac{\vec{r}_i}{r}$ — малый параметр задачи. Найдем отрезок ряда Тейлора по степеням $\vec{r}_i$ и автоматически получим требуемое разложение по $\frac{1}{r}$.

Разложение в ряд Тейлора функции в трехмерном пространстве проведем аналогично разложению функции с одномерным аргументом.

$$\left.\begin{aligned} & f(x) = f(0) + x \cdot \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=0} + \dots \\ & x \to \vec{r}_i \\ & f(x) \to \frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{r}_i\right|} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{r}_i\right|} \approx \frac{1}{r} + \left(\vec{r}_i, \left. \left(\vec{\nabla}_i \frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{r}_i\right|} \right) \right|_{\vec{r}_i = 0} \right)$$

Здесь $\vec{\nabla}_i$ - производная по координатам вектора $\vec{r}_i$.