

Экзамен. Поляризация диэлектрика и связанные заряды (продолжение).

$\vec{P} \equiv \frac{d\vec{p}}{dV}$ — поляризация среды, объемная плотность дипольного момента

или дипольный момент единицы объема.

Если n — концентрация молекул или число молекул в единице объема, то, разделив дипольный момент единицы объема \vec{P} на число молекул в единице объема n , получим средний дипольный момент молекулы $\frac{\vec{P}}{n} = \langle \vec{p} \rangle$.

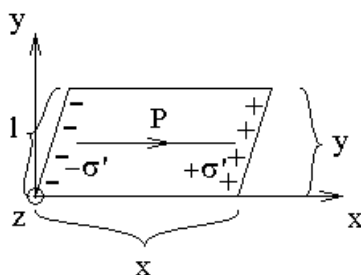
Тогда

$\vec{P} = n \langle \vec{p} \rangle$, где \vec{P} — поляризация среды, n — концентрация молекул, $\langle \vec{p} \rangle$ — средний дипольный момент молекулы.

Найдем связь между величиной поляризации и плотностью связанных зарядов.

При поляризации среды положительные связанные заряды смещаются вдоль вектора поляризации, а отрицательные — навстречу поляризации.

Рассмотрим наклонный параллелепипед, который поляризован вдоль одного из ребер:



Рассмотрим два выражения для дипольного момента всего куска диэлектрика и приравняем их друг к другу:

$$\left\{ \begin{array}{l} p = P \cdot V = P \cdot xyz \\ p = Q' \cdot x = \sigma' \cdot S \cdot x = \sigma' \cdot lz \cdot x \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$yP = \sigma' l \quad \Rightarrow$$

$$\sigma' = \frac{y}{l} P = P \cdot \cos(\widehat{\vec{P}, d\vec{S}}) = P_n.$$

На границе диэлектрик-вакуум образуются связанные заряды с поверхностной плотностью $\sigma' = P_n$. Аналогично на границе двух диэлектриков:

$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma'$ — скачок нормальной составляющей поляризации на границе двух диэлектрических сред определяется поверхностной плотностью связанных зарядов σ' , здесь нормаль направлена из среды 1 в среду 2: $\vec{n} \equiv \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$.

Заметим, что поляризация среды смещает через любую единичную площадку внутри диэлектрика заряд $\sigma' = P_n$. Чтобы понять это представим

себе, что рассматриваемый параллелепипед разрезан надвое произвольной плоскостью. Раздвинем две части параллелепипеда вправо и влево. На двух новых границах появятся связанные заряды противоположного знака с поверхностной плотностью $\sigma' = P_n$. Рассмотрим плоскость ровно посередине между двумя новыми границами диэлектрика. Соединим две части параллелепипеда обратно. Заряды на двух новых границах скомпенсируют друг друга и пропадут. Это означает, что через единицу площади рассматриваемой нами плоскости по границе между двумя частями параллелепипеда переместились заряды $\sigma' = P_n$, чтобы скомпенсировать заряды противоположного знака. Следовательно, в процессе поляризации диэлектрика через эту плоскость параллельную пропавшей границе прошли заряды с поверхностной плотностью $\sigma' = P_n$. Напомним, что направление плоскости выбрано произвольно. Следовательно, процесс поляризации среды смещает через любую единичную площадку внутри диэлектрика заряд $\sigma' = P_n$.

Рассмотрим диэлектрик, который по-разному поляризован в разных точках.

Мысленно выделим внутри этого диэлектрика некоторый объем V .

Рассмотрим единичную площадку на поверхности S этого объема.

Через эту единичную площадку при поляризации диэлектрика перемещается заряд $\sigma' = P_n$, так как поляризация среды смещает через любую единичную площадку внутри диэлектрика заряд $\sigma' = P_n$.

Рассмотрим, какой заряд Q' смещается через замкнутую поверхность S , которая является границей объема V .

$$Q' = \oint_S dQ' = \oint_S \sigma' dS = \oint_S P_n dS = \oint_S (\vec{P}, d\vec{S})$$

Смещается заряд, равный потоку вектора поляризации через замкнутую поверхность.

Заряд, который остается внутри замкнутой поверхности S отличается знаком:

$$\oint_S (\vec{P}, d\vec{S}) = -Q' \quad \text{— связь потока поляризации через границу объема и}$$

связанного заряда Q' внутри объема.

Разделим это равенство на объем V и устремим объем к нулю:

$$\oint_S (\vec{P}, d\vec{S}) = -Q' \quad \left| \frac{1}{V}; \quad |V \rightarrow 0 \quad \Rightarrow$$

$$\operatorname{div}(\vec{P}) = -\rho'$$

Рассмотрим три формы трех соотношений для диэлектриков. Во-первых:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\vec{E}) = 4\pi(\rho + \rho') \\ \oint_S (\vec{E}, d\vec{S}) = 4\pi(Q + Q') \\ E_{2n} - E_{1n} = 4\pi(\sigma + \sigma') \end{cases}$$

для микроскопического внутриатомного поля \vec{E} , так как на микроскопическом внутриатомном уровне свободные и связанные заряды равноправны.

Под напряженностью электрического поля \vec{E} в диэлектрике будем понимать усредненное микроскопическое поле \vec{E} по макроскопическому, но малому, объему. Следовательно, для напряженности поля \vec{E} в диэлектрике будут выполняться те же соотношения, что и для микроскопического внутриатомного поля \vec{E} .

Дополним эти уравнения следующими соотношениями:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\vec{P}) = -\rho' \\ \oint_S (\vec{P}, d\vec{S}) = -Q' \\ P_{2n} - P_{1n} = -\sigma' \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{rot}(\vec{E}) = 0 \\ \oint_l E_l dl = 0 \\ E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \end{cases}$$

Здесь, как и раньше, единичный вектор нормали к границе направлен из объема 1 в объем 2: $\vec{n} \equiv \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$.

Экзамен. Два способа вычисления электростатического потенциала φ , создаваемого поляризованным диэлектриком.

1-ый способ — вычисление потенциала связанных зарядов. Для каждого связанного заряда воспользуемся формулой $\varphi = \frac{q}{r}$ и получим:

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{V'} \frac{\rho'(\vec{r}') \cdot dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \oint_{S'} \frac{\sigma'(\vec{r}') \cdot dS'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

2-ой способ — вычисление потенциала молекулярных диполей. Для каждого диполя воспользуемся формулой $\varphi = \frac{(\vec{p}, \vec{r})}{r^3}$ и получим:

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{V'} \frac{(\vec{P}(\vec{r}'), \vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$$

Оба интегральных выражения для потенциала имеют особую точку при условии $\vec{r}' = \vec{r}$, в которой знаменатель подынтегральных выражений обращается в ноль. Эта особая точка является интегрируемой особенностью. И действительно, если сделать замену переменной интегрирования \vec{r}' на переменную $\vec{r}_0 = \vec{r}' - \vec{r}$, то в окрестности особой точки получим:

$$dV' = 4\pi r_0^2 dr_0 \quad \text{и} \quad dS' = 2\pi r_0 dr_0.$$

Тогда после сокращения r_0 в знаменателе и числителе подинтегральных выражений особая точка пропадает. В этом смысле рассматриваемая особая точка — интегрируемая особая точка.

Факультатив. Два способа вычисления электростатического поля \vec{E} , создаваемого поляризованным диэлектриком.

1-ый способ — вычисление напряженности поля связанных зарядов. Для каждого связанного заряда воспользуемся формулой $\vec{E} = q \frac{\vec{r}}{r^3}$ и получим:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_{V'} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \rho'(\vec{r}') \cdot dV' + \oint_{S'} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \sigma'(\vec{r}') \cdot dS'$$

Особая точка в интеграле по объему — интегрируемая особенность, которая пропадает при замене переменной интегрирования, а особая точка в интеграле по поверхности — это неинтегрируемая особенность. Причина этого в том, что при условии $\vec{r}' = \vec{r}$ точка наблюдения находится на поверхности со связанными зарядами, а напряженность поля \vec{E} испытывает скачок при переходе через заряженную поверхность. То есть, поле \vec{E} не имеет определенного значения на заряженной поверхности диэлектрика.

2-ой способ — вычисление напряженности поля молекулярных диполей.

Для каждого диполя воспользуемся формулой $\vec{E} = 3 \frac{(\vec{p}, \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} - \frac{4}{3} \pi \cdot \vec{p} \cdot \delta(\vec{r})$, заменим здесь $\vec{r} \rightarrow (\vec{r} - \vec{r}')$ и $\vec{p} \rightarrow \vec{P}(\vec{r}') \cdot dV'$, просуммируем поле \vec{E} по диполям всего объема $\int_{V'} \bullet$ и получим поле \vec{E} в точке с радиус-вектором \vec{r} :

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \int_{V'} \left(3 \frac{(\vec{P}(\vec{r}'), \vec{r} - \vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^5} - \frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) \cdot dV' - \frac{4}{3} \pi \cdot \int_{V'} \vec{P}(\vec{r}') \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}') \cdot dV' \\ \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) &= \int_{V'} \left(3 \frac{(\vec{P}(\vec{r}'), \vec{r} - \vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^5} - \frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) \cdot dV' - \frac{4}{3} \pi \cdot \vec{P}(\vec{r}) \end{aligned}$$

Здесь интеграл содержит неинтегрируемую в обычном смысле особую точку. Но интеграл по объему имеет определенное значение, если рассматривать интеграл в смысле главного значения. В окрестности особой точки мысленно вырезают шар с малым радиусом r_0 и с центром в особой точке. В объеме без этого шара интеграл берется и имеет определенное значение. Интеграл в смысле главного значения - это предел, к которому стремится интеграл по объему без шара при стремлении радиуса шара к нулю.

Экзамен. Вектор электрической индукции или электрического смещения.

$\vec{D} \equiv \vec{E} + 4\pi \vec{P}$ — определение вектора электрической индукции или электрического смещения.

$$\text{В СИ: } \vec{D} \equiv \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Рассмотрим дивергенцию поля \vec{D} :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{D}) &= \operatorname{div}(\vec{E} + 4\pi\vec{P}) = \operatorname{div}(\vec{E}) + 4\pi \cdot \operatorname{div}(\vec{P}) = 4\pi(\rho + \rho') + 4\pi \cdot (-\rho') = 4\pi\rho \\ \Rightarrow \operatorname{div}(\vec{D}) &= 4\pi\rho \end{aligned}$$

Аналогичные выражения можно получить в интегральной форме $\Phi_D = 4\pi Q$ и для границы раздела сред $D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma$. Здесь величины ρ, Q, σ относятся только к свободным зарядам.

$$\text{В СИ: } \operatorname{div}(\vec{D}) = \rho$$

Четыре основных формулы для диэлектриков в трех формах:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\vec{D}) = 4\pi\rho \\ \oint_S (\vec{D}, d\vec{S}) = 4\pi Q \\ D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\vec{P}) = -\rho' \\ \oint_S (\vec{P}, d\vec{S}) = -Q' \\ P_{2n} - P_{1n} = -\sigma' \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot}(\vec{E}) = 0 \\ \oint_l E_l dl = 0 \\ E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\vec{E}) = 4\pi(\rho + \rho') \\ \oint_S (\vec{E}, d\vec{S}) = 4\pi(Q + Q') \\ E_{2n} - E_{1n} = 4\pi(\sigma + \sigma') \end{array} \right.$$

В этих формулах, как и обычно, нормаль к границе раздела направлена из объема 1 в объем 2: $\vec{n} = \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$.

$$\text{В системе СИ: } \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\vec{D}) = \rho \\ \operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho + \rho') \\ \operatorname{div}(\vec{P}) = -\rho' \\ \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \end{array} \right.$$

Экзамен. Диэлектрическая восприимчивость и диэлектрическая проницаемость среды.

$\vec{P} \equiv \chi \vec{E}$ — определение χ — диэлектрической восприимчивости среды.

В системе СИ: $\vec{P} \equiv \varepsilon_0 \chi \vec{E}$.

Связь величин \vec{P} и \vec{E} не всегда линейна, но для линейной связи можно ввести диэлектрическую восприимчивость среды.

В кристаллах χ — матрица или тензор второго ранга.

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & \chi_{xz} \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & \chi_{yz} \\ \chi_{zx} & \chi_{zy} & \chi_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \text{ или } P_i = \sum_k \chi_{ik} E_k.$$

Тензор диэлектрической восприимчивости — симметричный тензор (без доказательства):

$$\chi_{ik} = \chi_{ki}.$$

$\vec{D} \equiv \varepsilon \vec{E}$ — определение ε — диэлектрической проницаемости среды.

$$\vec{D} \equiv \vec{E} + 4\pi \vec{P} = \vec{E} + 4\pi \chi \vec{E} = (1 + 4\pi \chi) \vec{E} = \varepsilon \vec{E} \quad \Rightarrow$$

$\varepsilon = 1 + 4\pi \chi$ — связь диэлектрической проницаемости и диэлектрической восприимчивости среды.

$$\chi = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}, \text{ откуда } \vec{P} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \vec{E}$$

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}, \text{ так как } \chi_{ik} = \chi_{ki}$$

$$\text{В системе СИ: } \begin{cases} \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} \\ \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ \vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} \\ \varepsilon = 1 + \chi \end{cases}$$

Факультатив. Связанные заряды обычно присутствуют только на поверхности диэлектрика.

$$\rho' = -\text{div}(\vec{P}) = -\text{div}(\chi \vec{E})$$

Внутри однородного диэлектрика $\chi = \text{const}$ и эту константу можно вынести за знак производной:

$$\rho' = -\text{div}(\chi \vec{E}) = -\chi \cdot \text{div}(\vec{E}) = -\chi \cdot 4\pi(\rho + \rho') \quad \Rightarrow \quad \rho' = -\chi \cdot 4\pi(\rho + \rho')$$

$$\Rightarrow \quad \rho' = -\frac{4\pi\chi}{1 + 4\pi\chi} \rho$$

Если диэлектрик однородный и в объеме диэлектрика нет свободных зарядов $\rho = 0$, то нет и связанных $\rho' = 0$.

Экзамен. Алгоритм решения симметричных задач с диэлектриками.

Алгоритм решения задач:

$$\Phi_D = 4\pi Q \Rightarrow DS = 4\pi Q \Rightarrow D = \frac{4\pi Q}{S} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{P} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \vec{E} \\ \varphi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\infty} E_l dl \end{array} \right. \Rightarrow \sigma' = -(P_{2n} - P_{1n})$$