Факультатив. Формула для одной из составляющих магнитного поля поверхностного тока (продолжение).

Любой вектор можно разложить на три взаимно ортогональных составляющих:

$\vec{r} = \vec{r}_i + \vec{r}_n + \vec{r}_\perp$, где $\begin{cases} \vec{r}_\perp \perp \vec{i} \\ \vec{r}_\perp \perp \vec{n} \end{cases}$. Тогда

$$d\vec{B} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\left[\vec{r}, \vec{i}\right]}{r^3} \cdot dS = \frac{dS}{cr^3} \cdot \left[\vec{r}_i + \vec{r}_n + \vec{r}_\perp, \vec{i}\right] = \frac{dS}{cr^3} \cdot \left[\vec{r}_i, \vec{i}\right] + \frac{dS}{cr^3} \cdot \left[\vec{r}_n, \vec{i}\right] + \frac{dS}{cr^3} \cdot \left[\vec{r}_\perp, \vec{i}\right].$$

В правой части первое слагаемое равно нулю, так как $\vec{r}_i \parallel \vec{i}$. Третье слагаемое перпендикулярно вектору $\vec{r}_\perp$, так как $\left[\vec{r}_\perp, \vec{i}\right] \perp \vec{r}_\perp$. Тогда третье слагаемое перпендикулярно вектору $\vec{B}_\perp$, так как $\vec{r}_\perp \parallel \vec{B}_\perp$. Следовательно, третье слагаемое не дает вклад в интересующую нас величину $\vec{B}_\perp$. Второе слагаемое, наоборот, целиком входит в величину $\vec{B}_\perp$, так как $\left[\vec{r}_n, \vec{i}\right] \parallel \vec{B}_\perp$, потому что $\begin{cases} dB_\perp \perp \vec{i} \\ dB_\perp \perp \vec{n} \end{cases}$.

Тогда вклад в величину $\vec{B}_\perp$ целиком определяется вторым слагаемым:

$$d\vec{B}_\perp = \frac{dS}{cr^3} \cdot \left[\vec{r}_n, \vec{i}\right].$$

С учетом того, что $\vec{r}_n \perp \vec{i}$, получим

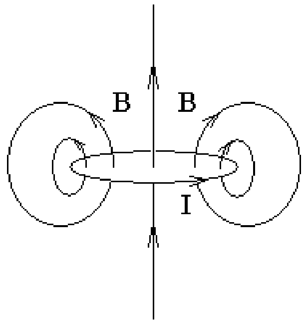
$$dB_\perp = \frac{dS}{cr^3} \cdot r_n i = \frac{i}{c} \cdot \frac{r_n dS}{r^3} = \frac{i}{c} \cdot \frac{\left(\vec{r}, d\vec{S}\right)}{r^3} = \frac{i}{c} \cdot \frac{r \cdot dS_{\perp \vec{r}}}{r^3} = \frac{i}{c} \cdot \frac{dS_{\perp \vec{r}}}{r^2} = \frac{i}{c} d\Omega$$

$dB_\perp = \frac{i}{c} d\Omega$, где $d\Omega$ — телесный угол, под которым поверхность с током видна из точки наблюдения поля $\vec{B}$; $\vec{B}_\perp$ составляющая магнитного поля такая, что $\begin{cases} \vec{B}_\perp \perp \vec{i} \\ \vec{B}_\perp \perp \vec{n} \end{cases}$, где $\vec{i}$ — плотность поверхностного тока, $\vec{n}$ — нормаль к поверхности с током.

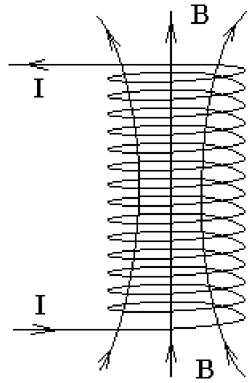
Экзамен. Магнитное поле внутри бесконечного соленоида.

Соленоид — это цилиндрическая катушка с проводящей обмоткой. По проводу соленоида пускают электрический ток. Можно сказать, что ток течет по боковой поверхности цилиндра вокруг оси цилиндра.

Рассмотрим магнитное поле круглого витка с током.



Мысленно сложим поля нескольких витков, расположенных один над другим и получим поле соленоида.



Внутри соленоида магнитное поле в основном направлено вдоль оси соленоида.

Линии магнитного поля проходят внутри соленоида вдоль его оси, а возвращаются снаружи соленоида. Снаружи места много, поэтому плотность линий мала, и поле мало.

Для бесконечного соленоида магнитное поле снаружи соленоида равно нулю.

Для любого элемента токонесущей поверхности соленоида оказывается, что составляющая $\vec{B}_\perp$ такая, что $\begin{cases} \vec{B}_\perp \perp \vec{i} \\ \vec{B}_\perp \perp \vec{n} \end{cases}$, направлена вдоль оси соленоида.

$dB_\perp = \frac{i}{c} d\Omega$ => $B_\perp = \frac{i}{c}\Omega = B_z$, где ось z направлена вдоль оси соленоида.

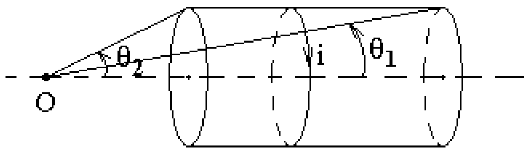
Внутри бесконечного соленоида $\Omega = 4\pi$ — полный телесный угол (телесный угол во все стороны), так как куда ни посмотришь из точки наблюдения поля, взгляд упирается в поверхность с током.

Тогда

$B = 4\pi \frac{i}{c} = \frac{4\pi}{c} nI$ — поле внутри бесконечного соленоида, где i — плотность поверхностного тока соленоида, n — число витков на единицу длины соленоида, I — сила тока в одном витке соленоида.

<u>Факультатив. Магнитное поле на оси соленоида конечной длины.</u>

Найдем магнитное поле в точке O на оси соленоида с поверхностной плотностью тока $i = nI$, где n — число витков на единице длины соленоида, I — сила тока в одном витке.



Здесь θ_1 и θ_2 — угловые радиусы донышек цилиндра при взгляде из точки наблюдения магнитного поля.

Ось соленоида является поворотной осью симметрии задачи. Решение должно обладать этой же симметрией. Тогда на оси симметрии может быть только осевая составляющая магнитного поля.

Для любого элемента поверхностного тока составляющая $B_\perp$ направлена вдоль оси соленоида. Тогда поле на оси:

$$B = B_\perp = \frac{i}{c}\Omega = \frac{\Omega}{c} nI$$

Найдем телесный угол Ω, под которым видна поверхность с током из точки наблюдения магнитного поля.

$$d\Omega = \sin(\theta)\cdot d\theta \cdot d\varphi \qquad =>$$

$$\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin(\theta)\cdot d\theta = 2\pi\cdot\left(\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2)\right)$$

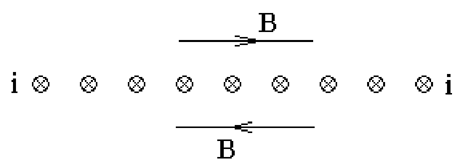
Тогда $B = \frac{\Omega}{c} nI = \frac{2\pi}{c} nI \cdot \left(\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2)\right)$

$B = \frac{2\pi}{c} nI \cdot \left(\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2)\right)$ — поле на оси соленоида, где n — число витков на единицу длины соленоида, I — сила тока в соленоиде, θ_1 и θ_2 — угловые радиусы торцов соленоида при взгляде из точки наблюдения поля.

В системе СИ: $\frac{1}{c} \to \frac{\mu_0}{4\pi}$.

Факультатив. Магнитное поле над токонесущей плоскостью.

Магнитное поле закручено вокруг токов по правилу правого винта. В таком случае магнитное поле плоскости с током имеет следующий вид:



Это поле перпендикулярно току и перпендикулярно нормали к поверхности с током. Тогда магнитное поле можно найти по формуле

$dB_{\perp} = \frac{i}{c} d\Omega$. Телесный угол, под которым видна бесконечная плоскость с током, равен 2π. Тогда

$B = \frac{2\pi}{c} i$, где поле $\vec{B}$ закручено вокруг тока по правилу правого винта, поле параллельно токонесущей плоскости и в этой плоскости перпендикулярно току.

Экзамен. Векторный потенциал.

$d\vec{A} \equiv \frac{I}{c} \cdot \frac{d\vec{l}}{r}$ — векторный потенциал элемента тока $I \cdot d\vec{l}$ на расстоянии r от элемента тока.

В системе СИ: $d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l}}{r}$.

Выражение $d\vec{A} \equiv \frac{I}{c} \cdot \frac{d\vec{l}}{r}$ похоже на выражение $\varphi = \frac{q}{r}$, где φ — скалярный потенциал. Поэтому $\vec{A}$ называют векторным потенциалом, хотя к потенциальной энергии он не имеет никакого отношения.

Рассмотрим $rot\left(d\vec{A}\right)$:

$$rot\left(d\vec{A}\right) = \left[\vec{\nabla}, \frac{I}{c} \cdot \frac{d\vec{l}}{r}\right] = \frac{I}{c} \cdot \left[\vec{\nabla}, \frac{1}{r} d\vec{l}\right] = \frac{I}{c} \cdot \left[\vec{\nabla} \frac{1}{r}, d\vec{l}\right].$$

Подставим сюда $\vec{\nabla} \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$, что следует из $\begin{cases} \varphi = \frac{q}{r} \\ \vec{E} = q \frac{\vec{r}}{r^3} \\ \vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi \end{cases}$, и получим

$$rot\left(d\vec{A}\right) = \frac{I}{c} \cdot \left[\vec{\nabla} \frac{1}{r}, d\vec{l}\right] = \frac{I}{c} \cdot \left[-\frac{\vec{r}}{r^3}, d\vec{l}\right] = \frac{I}{c} \cdot \left[d\vec{l}, \frac{\vec{r}}{r^3}\right] = \frac{I}{c} \cdot \frac{\left[d\vec{l}, \vec{r}\right]}{r^3}$$

Сравним этот результат с законом Био-Савара $d\vec{B} = \frac{I}{c} \cdot \frac{\left[d\vec{l}, \vec{r}\right]}{r^3}$ и получим:

$rot\left(d\vec{A}\right) = d\vec{B}$ =>

$\vec{B} = rot\left(\vec{A}\right)$— связь магнитного поля $\vec{B}$ и векторного потенциала $\vec{A}$.

$d\vec{A} \equiv \frac{I}{c} \cdot \frac{d\vec{l}}{r}$ =>

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int\limits_{V'} \frac{1}{c} \cdot \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \cdot dV'$$

Факультатив. Потенциалы переменных электромагнитных полей.

$$\begin{cases} \varphi(\vec{r}, t) = \dfrac{q\left(\vec{r}\,', t - \dfrac{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \\ d\vec{A}(\vec{r}, t) = \dfrac{I\left(\vec{r}\,', t - \dfrac{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}{c}\right) \cdot d\vec{l}}{c|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \end{cases}$$

Потенциалы зависят от зарядов и токов в предшествующий момент времени. Момент времени предшествует на время распространения сигнала $\dfrac{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}{c}$ от источника в точке $\vec{r}\,'$ до точки наблюдения $\vec{r}$.

Интересно, что $\begin{pmatrix} \varphi \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$ — 4-х вектор относительно преобразований Лоренца, так же как $\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Точнее и подробнее этот вопрос можно будет рассмотреть в конце курса.

Факультатив. Дивергенция векторного потенциала.

$$div\left(\vec{A}\right) = 0$$

Это равенство справедливо только для постоянных токов. Формулу нужно знать на экзамене. Доказательство формулы на экзамене знать не нужно.

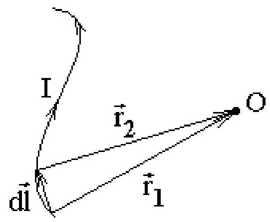
Это равенство можно доказать только для замкнутых токов. Постоянные токи замкнуты.

Сначала рассмотрим дивергенцию векторного потенциала для элемента тока, а не для замкнутого контура с током.

$$div\left(d\vec{A}\right) = \left(\vec{\nabla}, \frac{I}{c} \cdot \frac{d\vec{l}}{r}\right) = \frac{I}{c} \cdot \left(\vec{\nabla}, \frac{1}{r} d\vec{l}\right) = \frac{I}{c} \cdot \left(\vec{\nabla} \frac{1}{r}, d\vec{l}\right)$$

Подставим сюда $\vec{\nabla}\frac{1}{r}=-\frac{\vec{r}}{r^3}$, что следует из $\begin{cases}\varphi=\dfrac{q}{r}\\ \vec{E}=q\dfrac{\vec{r}}{r^3}\\ \vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi\end{cases}$, и получим

$$div\left(d\vec{A}\right)=\frac{I}{c}\cdot\left(-\frac{\vec{r}}{r^3},d\vec{l}\right)=-\frac{I}{c}\cdot\frac{\left(\vec{r},d\vec{l}\right)}{r^3}$$



Из рисунка видно, что

$\vec{r}_1=d\vec{l}+\vec{r}_2$ => $d\vec{l}=-\left(\vec{r}_2-\vec{r}_1\right)=-d\vec{r}$

Подставим это в выражение для $div\left(d\vec{A}\right)$ и получим

$$div\left(d\vec{A}\right)=\frac{I}{c}\cdot\frac{\left(\vec{r},d\vec{r}\right)}{r^3}$$

Рассмотрим

$d\left(\vec{r},\vec{r}\right)=\left(d\vec{r},\vec{r}\right)+\left(\vec{r},d\vec{r}\right)=2\left(\vec{r},d\vec{r}\right)$ => $\left(\vec{r},d\vec{r}\right)=\frac{1}{2}d\left(\vec{r},\vec{r}\right)$

Подставим это в выражение для $div\left(d\vec{A}\right)$ и получим

$$div\left(d\vec{A}\right)=\frac{I}{c}\cdot\frac{\frac{1}{2}d\left(\vec{r},\vec{r}\right)}{r^3}=\frac{I}{2c}\cdot\frac{d\left(r^2\right)}{r^3}=\frac{I}{2c}\cdot\frac{2rdr}{r^3}=\frac{I}{c}\cdot\frac{dr}{r^2}=-d\left(\frac{I}{cr}\right)$$

Теперь от рассмотрения одного элемента тока перейдем к рассмотрению замкнутого контура с током.

$$div\left(\vec{A}\right)=\oint\limits_l div\left(d\vec{A}\right)=\oint\limits_l\left(-d\left(\frac{I}{cr}\right)\right)=-\oint\limits_l d\left(\frac{I}{cr}\right)$$

Заметим, что для любой функции $\oint\limits_l d\left(\cdot\right)=0$, тогда

$$div\left(\vec{A}\right)=0$$

<u>Факультатив. Уравнение Пуассона для векторного потенциала.</u>

Из электростатики мы знаем, что для любой функции координат φ, которую можно представить в виде

$$\varphi(\vec{r}) = \int\limits_{V'} \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \cdot dV'$$

оказывается справедливо уравнение

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho .$$

Заменим в этих двух равенствах и во всех выкладках между ними

$\begin{cases} \varphi \to \vec{A} \\ \rho \to \dfrac{\vec{j}}{c} \end{cases}$ и получим что для любой функции координат $\vec{A}$, которую можно представить в виде

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int\limits_{V'} \frac{1}{c} \cdot \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} dV'$$

оказывается справедливо уравнение

$$\Delta\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} .$$

Таким образом, получаем

$\Delta\vec{A} = -\dfrac{4\pi}{c}\vec{j}$ — уравнение Пуассона для векторного потенциала. Формулу без доказательства нужно знать на экзамене.

Заметим, что для каждой проекции векторного потенциала получается уравнение аналогичное уравнению электростатики $\Delta\varphi = -4\pi\rho$. Следовательно, найти векторный потенциал можно, решив три задачи электростатики с плотностями зарядов: $\frac{1}{c} j_x$, $\frac{1}{c} j_y$ и $\frac{1}{c} j_z$. Хотя обычно так никто не поступает.

<u>Экзамен. Ротор магнитного поля B постоянных токов.</u>

$$\vec{B} = rot(\vec{A}) \qquad \Rightarrow \qquad rot(\vec{B}) = rot(rot(\vec{A})) = [\vec{\nabla}, [\vec{\nabla}, \vec{A}]]$$

Разложим правую часть равенства по правилу "бац минус цап" и получим

$$rot(\vec{B}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}, \vec{A}) - \vec{A}(\vec{\nabla}, \vec{\nabla}).$$

Первое слагаемое в правой части равно нулю, так как $(\vec{\nabla}, \vec{A}) = div(\vec{A}) = 0$, тогда

$$rot(\vec{B}) = -\vec{A}(\vec{\nabla}, \vec{\nabla}) = -(\vec{\nabla}, \vec{\nabla})\vec{A} = -\nabla^2\vec{A} = -\Delta\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \qquad \Rightarrow$$

$rot\left(\vec{B}\right)=\frac{4\pi}{c}\vec{j}$ — магнитное поле $\vec{B}$ закручено вокруг токов по правилу правого винта.

В системе СИ: $rot\left(\vec{B}\right)=\mu_0\vec{j}$.

Экзамен. Дивергенция магнитного поля B.

$$div\left(\vec{B}\right)=div\left(rot\left(\vec{A}\right)\right)=\left(\vec{\nabla},\left[\vec{\nabla},\vec{A}\right]\right)$$

Циклическая перестановка векторов в смешанном скалярно-векторном произведении не изменяет его величины. Тогда

$$div\left(\vec{B}\right)=\left(\vec{A},\left[\vec{\nabla},\vec{\nabla}\right]\right)$$

Векторное произведение вектора самого на себя равно нулю, поэтому

$\left[\vec{\nabla},\vec{\nabla}\right]=0$ =>

$$div\left(\vec{B}\right)=0$$

Это равенство доказано нами для магнитного поля постоянных токов. Максвелл предположил, что оно справедливо и для переменных электромагнитных полей. Все следствия из этого предположения согласуются с опытом, следовательно, равенство справедливо и для переменных полей.

Экзамен. Поток магнитного поля B через замкнутую поверхность.

По теореме Гаусса-Остроградского $\oint\limits_S\left(\vec{B},d\vec{S}\right)=\int\limits_V div\left(\vec{B}\right)\cdot dV$, но $div\left(\vec{B}\right)=0$.

Тогда

$\oint\limits_S\left(\vec{B},d\vec{S}\right)=0$ =>

Для любого объема, сколько линий втекает столько и вытекает. =>

Линии поля $\vec{B}$ нигде не начинаются и не заканчиваются. =>

Линии поля $\vec{B}$ замкнуты.

Факультатив. Поток поля магнитных зарядов.

Если удастся найти магнитные заряды, то кроме замкнутых вокруг токов линий магнитного поля появятся линии магнитного поля, которые должны выходить из положительных магнитных зарядов и входить в отрицательные магнитные заряды.

Если поток магнитного поля через замкнутую поверхность отличен от нуля, то в объеме, ограниченном этой поверхностью есть магнитные заряды.

Экзамен. Циркуляция магнитного поля B.

(или теорема о циркуляции поля $\vec{B}$ в интегральной форме)

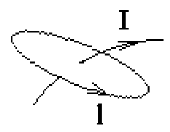
По теореме Стокса циркуляция магнитного поля по замкнутому контуру равна потоку ротора этого поля через площадку ограниченную контуром:

$$\oint\limits_l B_l dl = \int\limits_S \left(rot\left(\vec{B}\right), d\vec{S} \right).$$

Но ранее мы выяснили, что $rot\left(\vec{B}\right) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$, тогда

$$\oint\limits_l B_l dl = \int\limits_S \left(\frac{4\pi}{c}\vec{j}, d\vec{S} \right) = \frac{4\pi}{c} \cdot \int\limits_S \left(\vec{j}, d\vec{S} \right) = \frac{4\pi}{c} \cdot \int\limits_S dI = \frac{4\pi}{c} I \qquad =>$$

$\oint\limits_l B_l dl = \frac{4\pi}{c} I$, где I — токи пронизывающие контур интегрирования. Для положительных токов I направление обхода контура и направления тока образуют правый винт.



В системе СИ: $\oint\limits_l B_l dl = \mu_0 I$.