Экзамен. Энергия магнитного диполя в магнитном поле.

В электростатике:

$\vec{M} = \left[\vec{p}, \vec{E}\right]$ — момент сил, действующих на диполь в электрическом поле.

$W = -\left(\vec{p}, \vec{E}\right)$ — энергия диполя в электрическом поле.

Энергия диполя в электрическом поле определяется ориентацией диполя, то есть зависит от его поворота.

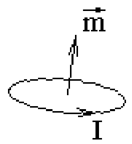
Повернуть диполь стремится момент сил.

Следовательно, в электростатике формула для энергии однозначно определяется формулой для момента сил.

То есть из $\vec{M} = \left[\vec{p}, \vec{E}\right]$ следует $W = -\left(\vec{p}, \vec{E}\right)$,

тогда из $\vec{M} = \left[\vec{m}, \vec{B}\right]$ следует $W = -\left(\vec{m}, \vec{B}\right)$.

Тогда $W = -\left(\vec{m}, \vec{B}\right)$ — энергия магнитного диполя $\vec{m} \equiv \dfrac{I}{c}\vec{S}$



.

Интересно, что магнитное поле не потенциально $rot\left(\vec{B}\right) \neq 0$, а магнитные силы потенциальны $W = -\left(\vec{m}, \vec{B}\right)$.

Это возможно, так как сила Ампера $d\vec{F} = \dfrac{I}{c}\left[d\vec{l}, \vec{B}\right]$ не параллельна магнитному полю $\vec{B}$.

Экзамен. Сила, действующая на магнитный диполь в неоднородном магнитном поле.

$\vec{F} = -\vec{\nabla} W = -\vec{\nabla}\left(-\left(\vec{m}, \vec{B}\right)\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{m}, \vec{B}\right)$ =>

$\vec{F} = \vec{\nabla}\left(\vec{m}, \vec{B}\right)$ — сила, действующая на магнитный диполь $\vec{m} \equiv \dfrac{I}{c}\vec{S}$.

Для сравнения в электростатике $\vec{F} = \left(\vec{p}, \vec{\nabla}\right)\vec{E}$, а при условии $rot\left(\vec{E}\right) = 0$ получаем $\vec{F} = \vec{\nabla}\left(\vec{p}, \vec{E}\right)$.

Факультатив. Векторный потенциал поля точечного магнитного диполя.

$d\vec{A} \equiv \dfrac{I}{c} \cdot \dfrac{d\vec{l}}{r}$ — определение векторного потенциала для элемента тока $Id\vec{l}$, r — расстояние от элемента тока до точки наблюдения.

Тогда для замкнутого контура с током векторный потенциал:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \oint\limits_{l'} \frac{I}{c} \cdot \frac{d\vec{l}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}.$$

С учетом того, что $d\vec{l}\,' = d\vec{r}\,'$ получим

$\vec{A}(\vec{r}) = \oint\limits_{l'} \frac{I}{c} \cdot \frac{d\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ — векторный потенциал замкнутого контура с током. Это точное выражение для векторного потенциала, а нас интересует приближенное выражение с учетом того, что расстояние от токов до точки наблюдения гораздо больше, чем размеры контура с током.

Выберем начало координат где-то в области магнитного диполя.

Пусть $\vec{r}\,'$ — радиус-вектор элемента тока магнитного диполя,

$\vec{r}$ — радиус-вектор точки наблюдения векторного потенциала, создаваемого магнитным диполем.

Для точечного магнитного диполя $r' << r$.

Разложим $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ по степеням малого параметра $\vec{r}\,'$.

Сделаем это аналогично разложению по x одномерной функции $f(x)$.

$$\left.\begin{aligned} & f(x) \approx f(0) + x \cdot \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=0} \\ & x \to \vec{r}\,' \\ & f(x) \to \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \end{aligned}\right\} \quad => \quad \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \approx \frac{1}{r} + \left(\vec{r}\,', \vec{\nabla}' \left.\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right|_{\vec{r}\,'=0} \right)$$

Заметим, что для любой функции от $(\vec{r}-\vec{r}\,')$ справедливо равенство $\vec{\nabla}' = -\vec{\nabla}$, так как

$$\left.\begin{aligned} & \frac{\partial\cdot}{\partial x'} = \frac{\partial\cdot}{\partial(x-x')} \cdot \frac{\partial(x-x')}{\partial x'} = \frac{\partial\cdot}{\partial(x-x')} \cdot (-1) \\ & \frac{\partial\cdot}{\partial x} = \frac{\partial\cdot}{\partial(x-x')} \cdot \frac{\partial(x-x')}{\partial x} = \frac{\partial\cdot}{\partial(x-x')} \cdot (+1) \end{aligned}\right\} \quad => \quad \vec{\nabla}' = -\vec{\nabla}$$

Тогда

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \approx \frac{1}{r} + \left(\vec{r}\,', \vec{\nabla}' \left.\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right|_{\vec{r}\,'=0} \right) = \frac{1}{r} - \left(\vec{r}\,', \vec{\nabla} \left.\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right|_{\vec{r}\,'=0} \right) = \frac{1}{r} - \left(\vec{r}\,', \vec{\nabla}\frac{1}{r} \right)$$

Здесь $\vec{\nabla}\frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$, так как $\left\{\begin{aligned} & \varphi = \frac{q}{r} \\ & \vec{E} = q\frac{\vec{r}}{r^3} \\ & \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi \end{aligned}\right.$. Тогда

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \approx \frac{1}{r} - \left(\vec{r}\,', -\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^3}\cdot(\vec{r}\,',\vec{r})$$

Подставим это в выражение для векторного потенциала контура с током $\vec{A}(\vec{r}) = \oint\limits_{l'} \frac{I}{c} \cdot \frac{d\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ и получим

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{I}{c}\cdot\oint\limits_{l'} \frac{d\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \approx \frac{I}{c}\cdot\left\{\oint\limits_{l'}\frac{d\vec{r}\,'}{r} + \oint\limits_{l'}\frac{(\vec{r}\,',\vec{r})}{r^3}d\vec{r}\,'\right\} = \frac{I}{c}\cdot\frac{1}{r}\cdot\oint\limits_{l'} d\vec{r}\,' + \frac{I}{c}\cdot\frac{1}{r^3}\cdot\oint\limits_{l'}(\vec{r}\,',\vec{r})\,d\vec{r}\,'$$

Здесь первый интеграл в правой части равенства равен нулю $\oint\limits_{l'} d\vec{r}\,' = 0$, так как интеграл $\oint\limits_{l'} d(\cdot) = 0$ равен нулю для любой функции под знаком дифференциала и в частности для $\vec{r}\,'$. Тогда

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{I}{cr^3}\cdot\oint\limits_{l'}(\vec{r}\,',\vec{r})\,d\vec{r}\,'$$

Мы хотим выразить векторный потенциал $\vec{A}(\vec{r})$ через магнитный дипольный момент $\vec{m} \equiv \frac{I}{c}\vec{S}$, где $\vec{S}$ — вектор площадки ограниченной контуром с током I.

С этой целью рассмотрим

$$\left[\vec{m},\vec{B}\right] = \vec{M} = \oint\limits_{l'} d\vec{M} = \oint\limits_{l'}\left[\vec{r}\,', d\vec{F}\,'\right] = \oint\limits_{l'}\left[\vec{r}\,', \frac{I}{c}\left[d\vec{l}\,',\vec{B}\right]\right]$$

Здесь в последнем равенстве подставлено выражение для силы Ампера $d\vec{F}\,' = \frac{I}{c}\left[d\vec{l}\,',\vec{B}\right]$, действующей на элемент тока $Id\vec{l}\,'$, радиус-вектор которого равен $\vec{r}\,'$.

Учтем, что $d\vec{l}\,' = d\vec{r}\,'$, и получим

$$\left[\vec{m},\vec{B}\right] = \oint\limits_{l'}\left[\vec{r}\,', \frac{I}{c}\left[d\vec{r}\,',\vec{B}\right]\right] = \frac{I}{c}\cdot\oint\limits_{l'}\left[\vec{r}\,',\left[d\vec{r}\,',\vec{B}\right]\right].$$

Двойное векторное произведение в правой части равенства преобразуем по правилу "бац минус цап" и получим

$$\left[\vec{m},\vec{B}\right] = \frac{I}{c}\cdot\oint\limits_{l'} d\vec{r}\,'(\vec{r}\,',\vec{B}) - \frac{I}{c}\cdot\oint\limits_{l'}\vec{B}(\vec{r}\,',d\vec{r}\,') = \frac{I}{c}\cdot\oint\limits_{l'}(\vec{r}\,',\vec{B})\,d\vec{r}\,' - \frac{I}{c}\vec{B}\cdot\oint\limits_{l'}(\vec{r}\,',d\vec{r}\,')$$

Второй интеграл в правой части равенства равен нулю. И действительно,

$$d(\vec{r}\,',\vec{r}\,') = (d\vec{r}\,',\vec{r}\,') + (\vec{r}\,',d\vec{r}\,') = 2(\vec{r}\,',d\vec{r}\,') \quad => \quad (\vec{r}\,',d\vec{r}\,') = \frac{1}{2}d(\vec{r}\,',\vec{r}\,') \quad =>$$

$\oint\limits_{l'} (\vec{r}\,', d\vec{r}\,') = \frac{1}{2} \cdot \oint\limits_{l'} d(\vec{r}\,', \vec{r}\,')$, где последний интеграл равен нулю, так как интеграл $\oint\limits_{l'} d(\cdot) = 0$ равен нулю для любой функции под знаком дифференциала.

Тогда в выражении для векторного произведения $[\vec{m}, \vec{B}]$ останется только первый интеграл:

$$[\vec{m}, \vec{B}] = \frac{I}{c} \cdot \oint\limits_{l'} (\vec{r}\,', \vec{B}) d\vec{r}\,'$$

Это равенство справедливо для любого значения вектора $\vec{B}$, если считать, что поле $\vec{B}$ одинаковое во всех точках.

Хотя это равенство было получено с использованием закона Ампера $d\vec{F} = \frac{I}{c}[d\vec{l}, \vec{B}]$, вектор $\vec{B}$ в равенстве $[\vec{m}, \vec{B}] = \frac{I}{c} \cdot \oint\limits_{l'} (\vec{r}\,', \vec{B}) d\vec{r}\,'$ может иметь любое значение, а значит, его можно сделать равным любому наперед заданному вектору, например, вектору $\vec{r}$.

Следовательно, в равенстве $[\vec{m}, \vec{B}] = \frac{I}{c} \cdot \oint\limits_{l'} (\vec{r}\,', \vec{B}) d\vec{r}\,'$ вектор $\vec{B}$ можно заменить на вектор $\vec{r}$. В результате получим

$$[\vec{m}, \vec{r}] = \frac{I}{c} \cdot \oint\limits_{l'} (\vec{r}\,', \vec{r}) d\vec{r}\,'.$$

Сравним это равенство с полученным выражением для векторного потенциала $\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{I}{cr^3} \cdot \oint\limits_{l'} (\vec{r}\,', \vec{r}) d\vec{r}\,'$ и получим

$\vec{A} = \frac{[\vec{m}, \vec{r}]}{r^3}$ — векторный потенциал точечного магнитного диполя, где $\vec{r}$ — вектор из диполя в точку наблюдения. Формулу без доказательства нужно знать **<u>к экзамену</u>**.

Заметим, что это равенство похоже на потенциал электрического диполя $\varphi = \frac{(\vec{p}, \vec{r})}{r^3}$.

<u>Факультатив. Магнитное поле В точечного магнитного диполя.</u>

$$\vec{B} = rot(\vec{A}) = rot\left(\frac{[\vec{m}, \vec{r}]}{r^3}\right) = \left[\vec{\nabla}, \frac{[\vec{m}, \vec{r}]}{r^3}\right] = \left[\vec{\nabla}, \left[\vec{m}, \frac{\vec{r}}{r^3}\right]\right]$$

Правую часть равенства распишем по правилу "бац минус цап" и получим

$$\vec{B} = \vec{m}\left(\vec{\nabla}, \frac{\vec{r}}{r^3}\right) - \frac{\vec{r}}{r^3}(\vec{\nabla}, \vec{m}).$$

Первое слагаемое в правой части равенства равно нулю, так как $\left(\vec{\nabla}, \frac{\vec{r}}{r^3}\right) = div\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = div\left(\vec{E}_1\right)$, где $\vec{E}_1$ — напряженность поля единичного точечного заряда в начале координат, в точке $\vec{r} = 0$. По теореме Гаусса в дифференциальной форме $div\left(\vec{E}\right) = 4\pi\rho$, а для единичного точечного заряда в начале координат имеем $\rho = 0$ во всех точках кроме точки $\vec{r} = 0$, следовательно, $div\left(\vec{E}_1\right) = 0$ во всех точках, кроме точки $\vec{r} = 0$, тогда и $\left(\vec{\nabla}, \frac{\vec{r}}{r^3}\right) = 0$ во всех точках, кроме точки $\vec{r} = 0$.

Тогда магнитное поле диполя:

$$\vec{B} = -\left(\vec{m}, \vec{\nabla}\right)\frac{\vec{r}}{r^3}.$$

Раскроем правую часть равенства, как производную от произведения $\vec{r}$ на $\frac{1}{r^3}$:

$$\vec{B} = -\frac{1}{r^3}\left(\vec{m}, \vec{\nabla}\right)\vec{r} - \vec{r}\left(\vec{m}, \vec{\nabla}\right)\frac{1}{r^3} = -\frac{1}{r^3}\left(\vec{m}, \vec{\nabla}\right)\vec{r} - \vec{r}\left(\vec{m}, \vec{\nabla}\frac{1}{r^3}\right).$$

Рассмотрим подробнее первое слагаемое правой части равенства:

$$\left(\vec{m}, \vec{\nabla}\right)\vec{r} = \left(m_x\frac{\partial}{\partial x} + m_y\frac{\partial}{\partial y} + m_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) =$$

$$= m_x\frac{\partial}{\partial x}x\vec{i} + m_y\frac{\partial}{\partial y}y\vec{j} + m_z\frac{\partial}{\partial z}z\vec{k} = m_x\vec{i} + m_y\vec{j} + m_z\vec{k} = \vec{m}$$

Тогда

$$\vec{B} = -\frac{\vec{m}}{r^3} - \vec{r}\left(\vec{m}, \vec{\nabla}\frac{1}{r^3}\right).$$

Рассмотрим теперь второе слагаемое:

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r^3}\right) = \vec{\nabla}\left(\left(\frac{1}{r}\right)^3\right) = 3\left(\frac{1}{r}\right)^2\vec{\nabla}\frac{1}{r}.$$

Здесь $\vec{\nabla}\frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$, так как $\begin{cases} \varphi = \frac{q}{r} \\ \vec{E} = q\frac{\vec{r}}{r^3} \\ \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi \end{cases}$. Тогда

$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r^3}\right) = 3\cdot\left(\frac{1}{r}\right)^2\cdot\left(-\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = -3\frac{\vec{r}}{r^5}$. Подставим это значение в выражение для магнитного поля $\vec{B}$ точечного магнитного диполя и получим:

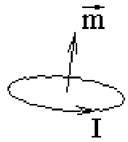
$$\vec{B} = -\frac{\vec{m}}{r^3} - \vec{r}\left(\vec{m}, -3\frac{\vec{r}}{r^5}\right) = 3\frac{(\vec{m},\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3}.$$

$\vec{B} = 3\frac{(\vec{m},\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3}$ — магнитное поле точечного диполя, где $\vec{m} \equiv \frac{I}{c}\vec{S}$ — магнитный дипольный момент, $\vec{r}$ — вектор из диполя в точку наблюдения. Эту формулу без доказательства нужно знать **к экзамену**. Заметим, что это выражение полностью совпадает с выражением для электрического поля, создаваемого электрическим диполем $\vec{E} = 3\frac{(\vec{p},\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}$.

$\vec{B} = 3\frac{(\vec{m},\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} + \frac{8}{3}\pi \cdot \vec{m} \cdot \delta(\vec{r})$ магнитное поле точечного диполя с учетом поля внутри самого диполя (без доказательства). Но $\vec{E} = 3\frac{(\vec{p},\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} - \frac{4}{3}\pi \cdot \vec{p} \cdot \delta(\vec{r})$.

Магнитное поле в веществе.
Экзамен. Намагниченность и связанные токи.

$\vec{M} \equiv \frac{d\vec{m}}{dV}$ — намагниченность или объемная плотность магнитного дипольного момента, где $\vec{m} \equiv \frac{I}{c}\vec{S}$ — магнитный дипольный момент.



Для электрического поля аналогично $\vec{P} \equiv \frac{d\vec{p}}{dV}$ — поляризация или объемная плотность электрического дипольного момента, где $\vec{p} \equiv \sum_i q_i\vec{r}_i$ — электрический дипольный момент.

Связанные токи, они же молекулярные токи, они же токи намагничения.

Связанные токи — внутриатомные и внутримолекулярные токи — токи с перемещением зарядов в пределах одной молекулы.

Токи проводимости или свободные токи — токи с макроскопическим перемещением зарядов — токи с перемещением зарядов много большим, чем размеры одной молекулы.

Будем обозначать:

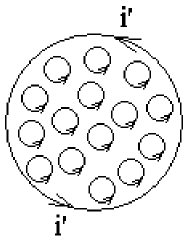
$I', \vec{j}', \vec{i}'$ — связанные токи;

$I, \vec{j}, \vec{i}$ — токи проводимости;

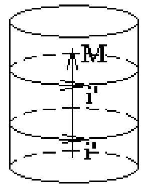
$(I'+I), (\vec{j}'+\vec{j}), (\vec{i}'+\vec{i})$ — полные токи.

Рассмотрим цилиндр, намагниченный вдоль оси, то есть с объемной плотностью магнитного дипольного момента, направленной вдоль оси цилиндра.

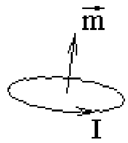
Вид с торца цилиндра со связанными токами:



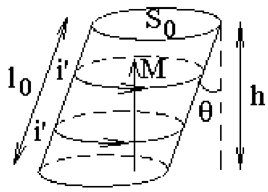
При сложении молекулярных токов получается ток, как бы идущий по боковой поверхности цилиндра — связанный ток.



Намагниченность цилиндра и связанные токи образуют правый винт, как и для магнитного момента каждого атома:



Рассмотрим теперь наклонный цилиндр, намагниченный перпендикулярно плоскости основания.



Чтобы найти связь между намагниченностью и связанными токами, выразим магнитный момент всего цилиндра двумя способами и приравняем эти два выражения.

$$\begin{cases} m = MV \\ m = \dfrac{I'}{c} S_0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad MV = \frac{I'}{c} S_0 \quad \Rightarrow \quad M \cdot S_0 h = \frac{i' l_0}{c} S_0 \quad \Rightarrow$$

$$M \cdot \frac{h}{l_0} = \frac{i'}{c} \quad \Rightarrow \quad M \cdot \cos(\theta) = \frac{i'}{c} \quad \Rightarrow$$

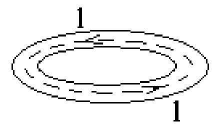
$M_\tau = \dfrac{i'}{c}$ — связь тангенциальной составляющей намагниченности и плотности поверхностных связанных токов на границе магнетик-вакуум.

На границе двух магнетиков:

$$M_{2\tau} - M_{1\tau} = \frac{i'}{c}, \text{ где } \vec{\tau} = \left[\frac{\vec{i}\,'}{i'}, \vec{n}_{1\to 2}\right].$$

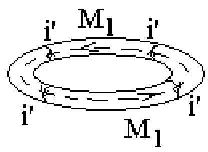
Скачок тангенциальной составляющей намагниченности образует правый винт с плотностью поверхностных связанных токов.

Рассмотрим замкнутый контур l, который целиком находится в намагниченном веществе. Пусть намагниченность вещества имеет различную величину в разных точках. Рассмотрим тонкую трубку вокруг контура в виде тора, который так же целиком находится внутри намагниченного вещества.



Рассмотрим M_l — составляющую намагниченности вдоль контура l. Забудем на время об остальных составляющих намагниченности.

Если тор намагничен вдоль контура l, то связанные токи будут течь по поверхности тора, охватывая намагниченность M_l по правилу правого винта.



Рассмотрим величину связанного тока, пронизывающего контур l, то есть протыкающего площадку, ограниченную контуром l.

Связанные токи протыкают площадку, ограниченную контуром l, пересекая линию внутренней окружности тора.

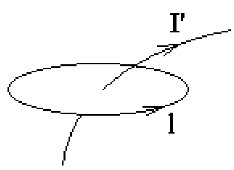
Для точек поверхности тора на этой линии $M_\tau = \frac{i'}{c}$ — это составляющая намагниченности вдоль этой линии, направленная по касательной к поверхности тора и перпендикулярно связанным токам.

Тогда $M_l \approx M_\tau = \frac{i'}{c}$ — составляющая магнитного поля вдоль контура l.

Найдем связанный ток, пронизывающий весь контур l:

$$I' = \oint_l dI' = \oint_l i'dl = \oint_l cM_l dl = c\oint_l M_l dl \qquad =>$$

$\oint_l M_l dl = \frac{I'}{c}$, где направление обхода контура l и направление пронизывающих контур связанных токов I' образуют правый винт.

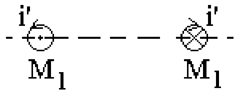


В системе СИ: $\oint\limits_l M_l dl = I'$.

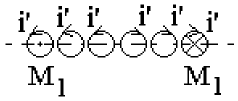
<u>Факультативная вставка.</u>

Докажем, что нет других связанных токов пронизывающих контур l, кроме токов, текущих по боковой поверхности тора.

Повернем плоскость рисунка так, чтобы плоскость контура l оказалась перпендикулярна плоскости рисунка.



Магнетик на площадке, ограниченной контуром, можно разбить на трубки (торы) других контуров.



Для новых трубок, сколько связанных токов втекает в площадку, ограниченную контуром l, столько и вытекает.

Кроме составляющей намагниченности M_l, остальные составляющие намагниченности создают связанные токи, которые так же имеют нулевой суммарный связанный ток через площадку, ограниченную контуром.

<u>Конец факультативной вставки.</u>

$\oint\limits_l M_l dl = \frac{I'}{c}$ — соотношение между намагниченностью $\vec{M}$ и связанными токами I' в интегральной форме.

Получим теперь соотношение между намагниченностью и связанными токами в дифференциальной форме.

$\oint\limits_l M_l dl = \frac{I'}{c} \quad \Big| \cdot \frac{1}{S}$ $\quad => \quad$ $\left(rot\left(\vec{M}\right)\right)_n = \frac{I'}{cS} = \frac{j'_n}{c}$, где $\vec{n} \uparrow\uparrow \vec{S}$ — любое направление. Тогда

$$rot\left(\vec{M}\right) = \frac{\vec{j}\,'}{c}$$

В системе СИ: $rot\left(\vec{M}\right) = \vec{j}\,'$.

В трех формах связь намагниченности среды $\vec{M}$ и связанных токов в дифференциальном, интегральном виде и для границы намагниченной среды имеет следующий вид:

$$\begin{cases} rot\left(\vec{M}\right) = \dfrac{\vec{j}\,'}{c} \\ \oint\limits_l M_l dl = \dfrac{I'}{c} \\ M_{2\tau} - M_{1\tau} = \dfrac{i'}{c} \end{cases}.$$

Связанные токи и намагниченность среды образуют правый винт или $\vec{\tau} = \left[\dfrac{\vec{i}\,'}{i'}, \vec{n}_{1\to 2}\right]$.

Факультатив. Намагниченность и связанные токи для переменных полей.

Соотношение $rot\left(\vec{M}\right) = \dfrac{\vec{j}\,'}{c}$ справедливо только для постоянных магнитных полей, независящих от времени.

В более общем случае

$$\vec{j}\,' = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + c \cdot rot\left(\vec{M}\right).$$

Чтобы понять природу слагаемого $\dfrac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ представим себе диэлектрический цилиндр, который поляризован вдоль оси цилиндра. Пусть поляризация цилиндра $\vec{P}$ линейно нарастает во времени.

На торцах цилиндра образуются связанные заряды с поверхностной плотностью $\sigma' = P$.

Производная от зарядов по времени равна силе тока, а производная от поверхностной плотности заряда по времени равна плотности тока $j' = \dfrac{d\sigma'}{dt} = \dfrac{dP}{dt}$.

Частная производная по времени вместо полной производной подчеркивает неизменность пространственных координат при вычислении производной.

Экзамен. Напряженность магнитного поля.

На внутриатомном микроскопическом уровне нет разницы между молекулярными токами I' и токами проводимости I. И те и другие находятся в вакууме и создают магнитное поле $\vec{B}$. Тогда для поля $\vec{B}$ на микроскопическом уровне

$$\oint\limits_l \left(\vec{B}, d\vec{l}\right) = \frac{4\pi}{c}\left(I + I'\right).$$

Усредненное микроскопическое магнитное поле $\vec{B}$ называют полем $\vec{B}$ в среде. Для усредненного поля $\vec{B}$ будет выполнено то же соотношение

$$\oint_l \left(\vec{B}, d\vec{l}\right) = \frac{4\pi}{c}\left(I + I'\right).$$

Вычтем из этого равенства следующее равенство, умноженное на 4π

$$\oint_l \left(\vec{M}, d\vec{l}\right) = \frac{I'}{c}$$ и получим

$$\oint_l \left(\vec{B} - 4\pi\vec{M}, d\vec{l}\right) = \frac{4\pi}{c} I .$$

Определим напряженность магнитного поля $\vec{H}$ следующим равенством: $\vec{H} \equiv \vec{B} - 4\pi\vec{M}$. Тогда