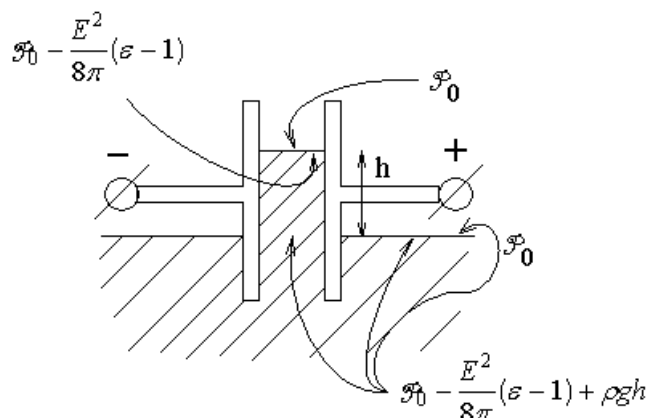


**Факультативно. Другое выражение сил в диэлектриках (продолжение).**

Рассмотрим втягивание жидкого диэлектрика в заряженный конденсатор, считая, что есть только сила  $\vec{f}_{II}$ .



Пусть атмосферное давление равно  $\mathcal{P}_0$ . На границе диэлектрика внутри заряженного конденсатора есть только тангенциальная составляющая напряженности электрического поля  $E_\tau = E$ . В таком случае к границе

диэлектрика приложено давление  $\mathcal{P}_{II} = \frac{E^2}{8\pi}(\varepsilon - 1)$ , которое тянет диэлектрик за

его верхнюю границу вверх. Следовательно, под границей диэлектрика давление меньше атмосферного на величину  $\mathcal{P}_{II}$ . Под границей жидкого диэлектрика давление растет с глубиной  $h$ , как  $\rho gh$ . Если  $h$  — высота подъема диэлектрика в конденсаторе, то внутри конденсатора давление на глубине  $h$  равно давлению снаружи конденсатора на той же высоте и равно

$\mathcal{P}_0 - \frac{E^2}{8\pi}(\varepsilon - 1) + \rho gh$ . Это давление снаружи конденсатора будет как под

границей диэлектрика, так и над его границей. Электрического поля снаружи конденсатора почти нет, поэтому нет и электрического давления на поверхность жидкости. То есть давление над поверхностью тоже

$\mathcal{P}_0 - \frac{E^2}{8\pi}(\varepsilon - 1) + \rho gh$ , но с другой стороны — это атмосферное давление. Тогда

$$\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}_0 - \frac{E^2}{8\pi}(\varepsilon - 1) + \rho gh \quad \Rightarrow \quad -\frac{E^2}{8\pi}(\varepsilon - 1) + \rho gh = 0 \quad \Rightarrow$$

$$h = \frac{E^2(\varepsilon - 1)}{8\pi\rho g} \quad \text{— высота подъема жидкого диэлектрика в заряженном}$$

конденсаторе.

$$\text{В системе СИ: } h = \frac{\varepsilon_0 E^2 (\varepsilon - 1)}{2\rho g}.$$

**Экзамен. Поляризация неполярных диэлектриков.**

Неполярные диэлектрики состоят из молекул, которые не имеют жесткого дипольного момента.

Дипольный момент молекулы возникает только под действием электрического поля  $\vec{E}$ :

$$\vec{p} = \alpha \vec{E}, \text{ где } \alpha \text{ — поляризуемость молекулы.}$$

-----

На первом самом низком уровне строгости получим.

$$\vec{P} = n \cdot \langle \vec{p} \rangle = n\alpha \cdot \langle \vec{E} \rangle = n\alpha \vec{E}$$

Сравним это с  $\vec{P} = \chi \vec{E}$  и получим, что  $\chi = n\alpha$ .

Подставим сюда выражение диэлектрической восприимчивости  $\chi$  через диэлектрическую проницаемость  $\varepsilon$ :

$$\chi = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \text{ и получим:}$$

$$\frac{\varepsilon - 1}{4\pi} = n\alpha \quad \Rightarrow$$

$\varepsilon - 1 = 4\pi n\alpha$ , здесь  $\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость среды,  $n$  — концентрация молекул,  $\alpha$  — поляризуемость каждой молекулы.

Концентрация молекул  $n$  пропорциональна плотности среды  $\tau$ . Тогда изменение диэлектрической проницаемости  $\varepsilon$  с изменением плотности среды происходит так, что отношение  $\frac{\varepsilon - 1}{\tau}$  остается постоянным:

$$\frac{\varepsilon - 1}{\tau} = \text{const.}$$

-----

Как показывает опыт, зависимость  $\varepsilon - 1$  от  $\tau$  линейная только для газов с низкой плотностью. При увеличении плотности газа и тем более при переходе к жидкой или твердой фазе диэлектриков отклонение от линейности становится очень заметным.

В более точном приближении нужно учесть отличие действующего на молекулу поля  $\vec{E}'$  от среднего поля в диэлектрике  $\vec{E}$ .

Представьте себе, что молекулы диэлектрика расположены вплотную друг к другу. В таком случае, чтобы найти действующее на молекулу поле  $\vec{E}'$ , нужно из среднего поля в диэлектрике  $\vec{E}$  вычесть поле, которое поляризованная молекула создает внутри себя. Дело в том, что поле, которое поляризованная молекула создает внутри себя, не действует на молекулу, так как на нее действует только внешнее по отношению к молекуле поле.

Чтобы найти поле, действующее на молекулу диэлектрика, нам сначала потребуется найти поле  $\vec{E}_p$  однородно поляризованного шара.

Если связанные заряды перемещаются, то возникает поляризация среды. Однородно поляризованный шар можно представить себе, как два шара с

плотностями зарядов  $+\rho$  и  $-\rho$ , таких что шар с плотностью заряда  $+\rho$  сдвинут на малый отрезок  $\vec{l}$  относительно шара с плотностью заряда  $-\rho$ .

Дипольный момент этих двух шаров равен

$$\vec{p} = q\vec{l} = \rho V \vec{l}.$$

Если разделить его на объем шара  $V$ , то получится поляризация диэлектрика

$$\vec{P} = \rho \vec{l}.$$

Поле в любой точке внутри поляризованного шара можно найти, как сумму полей двух заряженных шаров. Пусть  $\vec{r}_-$  — вектор из центра шара с плотностью заряда  $-\rho$  в точку наблюдения внутри поляризованного шара, а  $\vec{r}_+$  — вектор из центра шара с плотностью заряда  $+\rho$  в ту же точку наблюдения. Тогда

$$\begin{aligned} \vec{l} + \vec{r}_+ = \vec{r}_- & \Rightarrow \vec{r}_+ - \vec{r}_- = -\vec{l} \Rightarrow \\ \vec{E}_P = \vec{E}_{+\rho} + \vec{E}_{-\rho} = \frac{4}{3}\pi\rho\vec{r}_+ + \frac{4}{3}\pi(-\rho)\vec{r}_- = \frac{4}{3}\pi\rho(\vec{r}_+ - \vec{r}_-) = -\frac{4}{3}\pi\rho\vec{l} = -\frac{4}{3}\pi\vec{P}, \end{aligned}$$

где  $\frac{4}{3}\pi\rho\vec{r}$  поле внутри шара с плотностью заряда  $\rho$ .

Тогда величина электрического поля в любой точке поляризованного шара:

$$\vec{E}_P = -\frac{4}{3}\pi\vec{P}.$$

Следовательно, если мы мысленно удалим шар из поляризованного диэлектрика, так что в оставшемся диэлектрике связанные заряды не сдвинутся, то поле в образовавшейся полости будет равно  $\vec{E} - \vec{E}_P = \vec{E} + \frac{4}{3}\pi\vec{P}$ , где  $\vec{E}$  — поле в диэлектрике до удаления шара,  $\vec{P}$  — поляризация диэлектрика. И действительно, вместе с шаром там должно быть поле  $\vec{E}$ , значит, без шара поле будет  $\vec{E} - \vec{E}_P$ .

Заметим, что поле в шаровой полости не зависит от радиуса удаляемого шара. На каждую молекулу диэлектрика в среднем приходится объем равный  $1/n$ , где  $n$  — концентрация молекул. Удалим из диэлектрика шар вокруг интересующей нас молекулы именно с таким объемом. Это — то же самое, что удалить из диэлектрика одну интересующую нас молекулу. Если рассуждать не слишком строго, то поле в образовавшейся шаровой полости и будет полем, действующем на молекулу:

$$\vec{E}' = \vec{E} + \frac{4}{3}\pi\vec{P}.$$

Более строго нужно удалить шар произвольного радиуса и вернуть на место все молекулы этого шара, кроме центральной молекулы. Можно показать, что в случае случайного расположения молекул и в случае кубической симметрии диэлектрического кристалла все молекулы шара кроме

центральной создают в центре шара нулевое электрическое поле. Эту часть доказательства можно найти в лекциях за 2012 — 2014 годы или учебниках по электричеству, например:

1. И. Е. Тамм. Основы теории электричества.
2. Д. В. Сивухин. Курс общей физики. Том 3. Электричество.

Дипольный момент молекулы  $\vec{p}$  наводится пропорционально именно действующему на молекулу полю  $\vec{E}'$ :

$$\vec{p} = \alpha \vec{E}' = \alpha \cdot \left( \vec{E} + \frac{4}{3} \pi \vec{P} \right).$$

Умножим это равенство на концентрацию молекул и получим в левой части равенства поляризацию среды  $\vec{P}$ :

$$\vec{P} = n\alpha \cdot \left( \vec{E} + \frac{4}{3} \pi \vec{P} \right) \Rightarrow$$

$$\vec{P} = \frac{n\alpha \vec{E}}{1 - \frac{4}{3} \pi n\alpha} = \chi \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \chi = \frac{n\alpha}{1 - \frac{4}{3} \pi n\alpha} \quad \Rightarrow$$

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\chi = 1 + \frac{4\pi n\alpha}{1 - \frac{4}{3} \pi n\alpha} = \frac{1 + \frac{8}{3} \pi n\alpha}{1 - \frac{4}{3} \pi n\alpha}$$

Обозначим  $\beta \equiv \frac{4}{3} \pi n\alpha$ , тогда

$$\varepsilon = \frac{1 + 2\beta}{1 - \beta} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon - \beta\varepsilon = 1 + 2\beta \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \quad \Rightarrow$$

$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4}{3} \pi n\alpha$  — формула Клаузиуса — Моссотти, в системе СИ:

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{n\alpha}{3}.$$

Здесь  $n$  — концентрация молекул,  $\alpha$  — поляризуемость одной молекулы.

Концентрация молекул пропорциональна плотности среды  $n \sim \tau$ , тогда

$$\frac{1}{\tau} \cdot \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \text{const}$$

при изменении плотности диэлектрика величина  $\frac{1}{\tau} \cdot \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}$  остается

постоянной.

Для переменных полей аналогичная формула называется формулой Лоренц — Лорентца (или формулой Лоренца — Лоренца).

**Экзамен. Поляризация полярных газообразных диэлектриков.**

Молекулы полярных диэлектриков являются жесткими диполями, такими как, например, молекула HCl.

Для этих молекул во внешнем электрическом поле появляется и наведенный диполь, но его величина гораздо меньше величины жесткого диполя, поэтому наведенными диполями мы будем пренебрегать.

Жесткие диполи молекул стремятся к минимуму потенциальной энергии, то есть стремятся повернуться по полю  $\vec{E}$ , так как энергия диполя  $W = -(\vec{p}, \vec{E})$ .

Это с одной стороны, а с другой стороны, тепловые столкновения молекул стремятся разбросать диполи по направлениям случайным образом.

В результате совместного влияния этих двух факторов и происходит поляризация полярных газообразных диэлектриков во внешнем электрическом поле.

Пусть  $p_0$  — величина жесткого дипольного момента молекулы.

Пусть  $d\xi$  — вероятность того, что диполь направлен в телесный угол  $d\Omega$ .

Согласно распределению Больцмана эта вероятность пропорциональна экспоненте  $e^{-\frac{W}{kT}}$ . Кроме того она пропорциональна величине телесного угла  $d\Omega$ . Тогда

$d\xi \sim e^{-\frac{W}{kT}} d\Omega$ , где малый телесный угол можно выразить через углы сферической системы координат  $d\Omega = \sin(\theta) \cdot d\theta \cdot d\varphi$ . Тогда

$$d\xi \sim e^{-\frac{W}{kT}} \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta \cdot d\varphi$$

С учетом того, что  $W \ll kT$  вместо экспоненты оставим отрезок ряда Тейлора:

$$d\xi \sim \left(1 - \frac{W}{kT}\right) \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta \cdot d\varphi.$$

Пусть ось  $z$  направлена вдоль внешнего электрического поля  $\vec{E}$ . Задача обладает симметрией относительно поворотов вокруг оси  $z$ , поэтому от угла  $\varphi$  ничего не зависит, и суммирование по углу  $\varphi$  дает множитель  $2\pi$ , который можно включить в некоторую константу  $A$ :

$$d\xi = A \cdot \left(1 - \frac{W}{kT}\right) \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta \text{ — вероятность того, что направление диполя}$$

составляет с направлением внешнего электрического поля угол, который лежит в пределах от  $\theta$  до  $\theta + d\theta$ .

Константу  $A$  можно найти из так называемого условия нормировки  $\int d\xi = 1$ , которое означает, что сумма всех вероятностей равна единице.

$$1 = \int d\xi = \int_0^\pi A \cdot \left(1 - \frac{W}{kT}\right) \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta.$$

Подставим сюда  $W = -(\vec{p}, \vec{E}) = -p_0 E \cdot \cos(\theta)$  и получим

$$1 = \int_0^\pi A \cdot \left(1 + \frac{p_0 E \cdot \cos(\theta)}{kT}\right) \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta = A \int_0^\pi \sin(\theta) \cdot d\theta + A \frac{p_0 E}{kT} \int_0^\pi \cos(\theta) \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta.$$

Второй интеграл равен нулю, а первый равен двум. Тогда  $1 = 2A \Rightarrow$

$$A = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$d\xi = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{p_0 E \cdot \cos(\theta)}{kT}\right) \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta, \text{ где } d\xi \text{ — вероятность того, что}$$

направление диполя составляет угол с направлением напряженности поля от  $\theta$  до  $\theta + d\theta$ ,  $p_0$  — величина жесткого дипольного момента молекулы.

Найдем поляризацию среды:

$$\begin{aligned} P &= P_E = n \cdot \langle p_E \rangle = n \cdot \int p_E d\xi = n \cdot \int p_0 \cos(\theta) \cdot d\xi = \\ &= n \cdot \int_0^\pi p_0 \cos(\theta) \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{p_0 E \cdot \cos(\theta)}{kT}\right) \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta = \\ &= \frac{np_0}{2} \cdot \int_0^\pi \cos(\theta) \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta + \frac{np_0^2 E}{2kT} \cdot \int_0^\pi \cos^2(\theta) \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta. \end{aligned}$$

Здесь первый интеграл равен нулю, а второй интеграл равен  $\frac{2}{3}$ . Тогда

$$P = \frac{np_0^2 E}{3kT} \Rightarrow$$

$$\vec{P} = \frac{np_0^2}{3kT} \vec{E} \text{ — поляризация полярных газообразных диэлектриков.}$$

$$\chi = \frac{np_0^2}{3kT} \text{ — диэлектрическая восприимчивость среды.}$$

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\chi = 1 + \frac{4\pi np_0^2}{3kT} \text{ — диэлектрическая проницаемость среды, в}$$

$$\text{системе СИ: } \varepsilon = 1 + \chi = 1 + \frac{np_0^2}{3\varepsilon_0 kT} \text{ и } \vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} = \frac{np_0^2}{3kT} \vec{E}.$$

Заметим, что в отличие от поляризации неполярных диэлектриков поляризация полярных диэлектриков зависит от температуры:  $\chi(T)$  и  $\varepsilon(T)$ .

### Экзамен. Диэлектрики с особыми свойствами.

Пьезоэлектрики. Ключевые слова: деформация — электрическое напряжение.

Прямой пьезоэффект — пьезозажигалка. При деформации диэлектрика возникает электрическое напряжение.

Обратный пьезоэффект — пьезокерамика для микро перемещений зеркала лазера и управления его частотой. Под действием электрического напряжения диэлектрик деформируется.

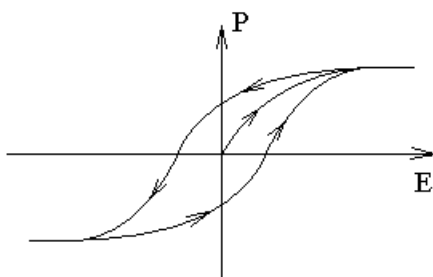
Пироэлектрики. Ключевые слова: теплота — электрическое напряжение.

Прямой пироэлектрический эффект наблюдается в веществах, в которых поляризация есть без воздействия внешнего электрического поля. В пироэлектриках поляризация изменяется при изменении температуры диэлектрика:  $\Delta P = \gamma \cdot \Delta T$ . При длительном хранении пироэлектрика связанные заряды на его поверхности нейтрализуются свободными зарядами из воздуха:  $\sigma' + \sigma = 0$ . При изменении температуры компенсация зарядов нарушается и вокруг диэлектрика возникает электрическое поле. Прямой пироэлектрический эффект используется в приемниках электромагнитного излучения, где пирокристалл нагревается излучением. Пирокристалл находится между обкладками конденсатора, с которого снимается электрическое напряжение, пропорциональное изменению температуры и пропорциональное мощности регистрируемого излучения.

Обратный пироэлектрический эффект — при адиабатическом изменении поля  $\vec{E}$  изменяется температура диэлектрика.

Сегнетоэлектрики. Ключевое слово: гистерезис — отставание.

Очень похоже на ферромагнетики: спонтанная поляризация, переполяризация электрическим полем, насыщение поляризации, остаточная поляризация. Ферромагнетики позднее будут рассмотрены подробнее.



Факультативная вставка.

Электрострикция — квадратичная по электрическому полю деформация диэлектрика в отличие от линейной по полю деформации пьезоэлектриков.

Электреты — диэлектрики, долго сохраняющие поляризацию без внешнего электрического поля, например, пироэлектреты в нагретом состоянии помещают в электрическое поле и охлаждают.

Антисегнетоэлектрики имеют спонтанно поляризованные элементарные ячейки, направления спонтанной поляризации в которых попарно антипараллельны.

Конец факультативной вставки.

### Электрический ток.

Экзамен. Сила тока, плотность тока, плотность поверхностного тока.

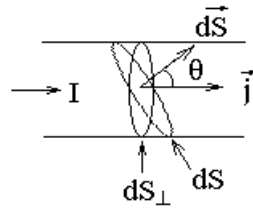
$I \equiv \frac{dq}{dt}$  — сила тока — это заряд, протекающий в единицу времени.

$j \equiv \frac{dI}{dS_{\perp}}$  — поверхностная плотность объемного тока — сила тока через

единичную площадку перпендикулярную току. Для краткости будем говорить: плотность тока.

$i \equiv \frac{dI}{dl_{\perp}}$  — линейная плотность поверхностного тока — сила тока,

текущего по поверхности и протекающего через единичный отрезок перпендикулярный току. Для краткости будем говорить: плотность поверхностного тока.



$$dI = j \cdot dS_{\perp} = j \cdot dS \cdot \cos(\theta) = (\vec{j}, d\vec{S}) \quad \Rightarrow$$

$$dI = (\vec{j}, d\vec{S}) \quad \text{сила тока равна потоку плотности тока}$$

$$dI = (\vec{j}, d\vec{S}) = j_n dS \quad \Rightarrow$$

$j_n = \frac{dI}{dS}$  — проекция плотности тока на нормаль к площадке.