

**Факультативно. Дивергенция векторного потенциала.**

$$\operatorname{div}(\vec{A}) = 0$$

Это равенство справедливо только для постоянных токов. Формулу нужно знать на экзамене. Доказательство формулы на экзамене знать не нужно.

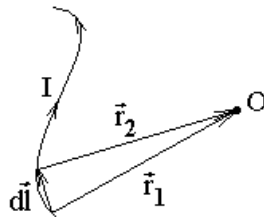
Это равенство можно доказать только для замкнутых токов. Постоянные токи замкнуты.

Сначала рассмотрим дивергенцию векторного потенциала для элемента тока, а не для замкнутого контура с током.

$$\operatorname{div}(d\vec{A}) = \left( \vec{\nabla}, \frac{I}{c} \cdot \frac{d\vec{l}}{r} \right) = \frac{I}{c} \cdot \left( \vec{\nabla}, \frac{1}{r} d\vec{l} \right) = \frac{I}{c} \cdot \left( \vec{\nabla} \frac{1}{r}, d\vec{l} \right)$$

Подставим сюда  $\vec{\nabla} \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$ , что следует из 
$$\begin{cases} \varphi = \frac{q}{r} \\ \vec{E} = q \frac{\vec{r}}{r^3}, \text{ и получим} \\ \vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi \end{cases}$$

$$\operatorname{div}(d\vec{A}) = \frac{I}{c} \cdot \left( -\frac{\vec{r}}{r^3}, d\vec{l} \right) = -\frac{I}{c} \cdot \frac{(\vec{r}, d\vec{l})}{r^3}$$



Из рисунка видно, что

$$\vec{r}_1 = d\vec{l} + \vec{r}_2 \quad \Rightarrow \quad d\vec{l} = -(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = -d\vec{r}$$

Подставим это в выражение для  $\operatorname{div}(d\vec{A})$  и получим

$$\operatorname{div}(d\vec{A}) = \frac{I}{c} \cdot \frac{(\vec{r}, d\vec{r})}{r^3}$$

Рассмотрим

$$d(\vec{r}, \vec{r}) = (d\vec{r}, \vec{r}) + (\vec{r}, d\vec{r}) = 2(\vec{r}, d\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad (\vec{r}, d\vec{r}) = \frac{1}{2} d(\vec{r}, \vec{r})$$

Подставим это в выражение для  $\operatorname{div}(d\vec{A})$  и получим

$$\operatorname{div}(d\vec{A}) = \frac{I}{c} \cdot \frac{\frac{1}{2} d(\vec{r}, \vec{r})}{r^3} = \frac{I}{2c} \cdot \frac{d(r^2)}{r^3} = \frac{I}{2c} \cdot \frac{2rdr}{r^3} = \frac{I}{c} \cdot \frac{dr}{r^2} = -d\left(\frac{I}{cr}\right)$$

Теперь от рассмотрения одного элемента тока перейдем к рассмотрению замкнутого контура с током.

$$\operatorname{div}(\vec{A}) = \oint_l \operatorname{div}(d\vec{A}) = \oint_l \left( -d\left(\frac{I}{cr}\right) \right) = -\oint_l d\left(\frac{I}{cr}\right)$$

Заметим, что для любой функции координат  $(\cdot)$  криволинейный интеграл второго рода  $\oint_l d(\cdot) = 0$  равен нулю, тогда

$$\operatorname{div}(\vec{A}) = 0$$

### **Факультативно. Уравнение Пуассона для векторного потенциала.**

Из электростатики мы знаем, что для любой функции координат  $\varphi$ , которую можно представить в виде

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot dV'$$

оказывается справедливо уравнение

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho.$$

Из первого равенства следует второе. Заменим в этих двух равенствах и во всех выкладках между ними

$$\begin{cases} \varphi \rightarrow \vec{A} \\ \rho \rightarrow \frac{\vec{j}}{c} \end{cases} \text{ и получим что для любой функции координат } \vec{A}, \text{ которую}$$

можно представить в виде

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int_{V'} \frac{1}{c} \cdot \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

оказывается справедливо уравнение

$$\Delta\vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}.$$

Таким образом, получаем

$$\Delta\vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \text{ — уравнение Пуассона для векторного потенциала. Формулу}$$

без доказательства нужно знать на экзамене.

Заметим, что для каждой проекции векторного потенциала получается уравнение аналогичное уравнению электростатики  $\Delta\varphi = -4\pi\rho$ . Следовательно, найти векторный потенциал можно, решив три задачи электростатики с плотностями зарядов:  $\frac{1}{c}j_x$ ,  $\frac{1}{c}j_y$  и  $\frac{1}{c}j_z$ . Хотя обычно так никто не поступает.

### **Экзамен. Ротор магнитного поля $\vec{B}$ постоянных токов.**

$$\vec{B} = \operatorname{rot}(\vec{A}) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rot}(\vec{B}) = \operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{A})) = [\vec{\nabla}, [\vec{\nabla}, \vec{A}]]$$

Разложим правую часть равенства по правилу "бац минус цап" и получим

$$\text{rot}(\vec{B}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}, \vec{A}) - \vec{A}(\vec{\nabla}, \vec{\nabla}).$$

Первое слагаемое в правой части равно нулю, так как  $(\vec{\nabla}, \vec{A}) = \text{div}(\vec{A}) = 0$ ,

тогда

$$\text{rot}(\vec{B}) = -\vec{A}(\vec{\nabla}, \vec{\nabla}) = -(\vec{\nabla}, \vec{\nabla})\vec{A} = -\nabla^2 \vec{A} = -\Delta \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad \Rightarrow$$

$$\text{rot}(\vec{B}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad \text{— магнитное поле } \vec{B} \text{ закручено вокруг токов по правилу}$$

правого винта.

$$\text{В системе СИ: } \text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}.$$

### Экзамен. Дивергенция магнитного поля $B$ .

$$\text{div}(\vec{B}) = \text{div}(\text{rot}(\vec{A})) = (\vec{\nabla}, [\vec{\nabla}, \vec{A}])$$

Циклическая перестановка векторов в смешанном скалярно-векторном произведении не изменяет его величины. Тогда

$$\text{div}(\vec{B}) = (\vec{A}, [\vec{\nabla}, \vec{\nabla}])$$

Векторное произведение вектора самого на себя равно нулю, поэтому

$$[\vec{\nabla}, \vec{\nabla}] = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\text{div}(\vec{B}) = 0$$

Это равенство доказано нами для магнитного поля постоянных токов. Максвелл предположил, что оно справедливо и для переменных электромагнитных полей. Все следствия из этого предположения согласуются с опытом, следовательно, равенство справедливо и для переменных полей.

### Экзамен. Поток магнитного поля $B$ через замкнутую поверхность.

По теореме Гаусса-Остроградского  $\oint_S (\vec{B}, d\vec{S}) = \int_V \text{div}(\vec{B}) \cdot dV$ , но

$$\text{div}(\vec{B}) = 0.$$

Тогда

$$\oint_S (\vec{B}, d\vec{S}) = 0 \quad \Rightarrow$$

Для любого объема, сколько линий втекает столько и вытекает.  $\Rightarrow$

Линии поля  $\vec{B}$  нигде не начинаются и не заканчиваются.  $\Rightarrow$

Линии поля  $\vec{B}$  замкнуты.

### Факультативно. Поток поля магнитных зарядов.

Если удастся найти магнитные заряды, то кроме замкнутых вокруг токов линий магнитного поля появятся линии магнитного поля, которые должны выходить из положительных магнитных зарядов и входить в отрицательные магнитные заряды.

Если поток магнитного поля через замкнутую поверхность отличен от нуля, то в объеме, ограниченном этой поверхностью, есть магнитные заряды.

### Экзамен. Циркуляция магнитного поля $\vec{B}$ .

(или теорема о циркуляции поля  $\vec{B}$  в интегральной форме)

По теореме Стокса циркуляция магнитного поля по замкнутому контуру равна потоку ротора этого поля через площадку ограниченную контуром:

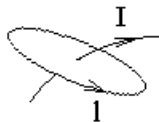
$$\oint_l B_l dl = \int_S (\text{rot}(\vec{B}), d\vec{S}).$$

Но ранее мы выяснили, что  $\text{rot}(\vec{B}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$ , тогда

$$\oint_l B_l dl = \int_S \left( \frac{4\pi}{c} \vec{j}, d\vec{S} \right) = \frac{4\pi}{c} \cdot \int_S (\vec{j}, d\vec{S}) = \frac{4\pi}{c} \cdot \int_S dI = \frac{4\pi}{c} I \quad \Rightarrow$$

$$\oint_l B_l dl = \frac{4\pi}{c} I, \text{ где } I \text{ — токи пронизывающие контур интегрирования. Для}$$

положительных токов  $I$  направление обхода контура и направления тока образуют правый винт.



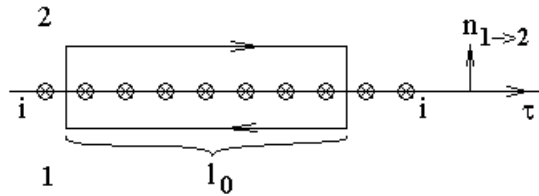
$$\text{В системе СИ: } \oint_l B_l dl = \mu_0 I.$$

### Экзамен. Скачок магнитного поля $\vec{B}$ при переходе через токонесущую поверхность.

(граничные условия для поля  $\vec{B}$  в вакууме)

Скачок испытывает тангенциальная составляющая магнитного поля.

Если подойти к поверхности с током на расстояние, которое гораздо меньше радиусов кривизны поверхности, то поверхность будет выглядеть плоской. Рассмотрим поверхностный ток, который протекает по поверхности перпендикулярной плоскости рисунка. Пусть токи текут от нас.



Рассмотрим циркуляцию магнитного поля по прямоугольному контуру, расположенному в плоскости перпендикулярной токам. Пусть вертикальные отрезки этого контура очень малы, тогда их вкладом в циркуляцию магнитного поля можно пренебречь.

Из теоремы о циркуляции магнитного поля

$$\oint_l B_l dl = \frac{4\pi}{c} I$$

$$\text{получаем } B_{2l}l_0 + B_{1l}l_0 = \frac{4\pi}{c} il_0 \quad \Rightarrow \quad B_{2l} + B_{1l} = \frac{4\pi}{c} i.$$

На верхнем отрезке направление вдоль контура  $d\vec{l}$  совпадает с выбранным направлением единичного вектора  $\vec{\tau} \equiv \left[ \frac{\vec{i}}{i}, \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \right]$ , поэтому

$B_{2l} = B_{2\tau}$ . На нижнем отрезке векторы  $d\vec{l}$  и  $\vec{\tau}$  противоположны по направлению, поэтому  $B_{1l} = -B_{1\tau}$ . Тогда

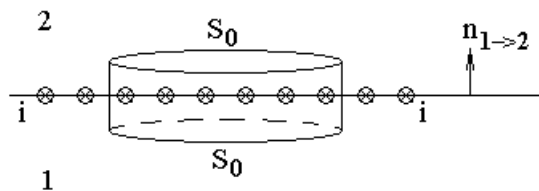
$$B_{2\tau} - B_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} i, \text{ где } \vec{\tau} \equiv \left[ \frac{\vec{i}}{i}, \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \right] \text{ — единичный вектор, направленный}$$

по касательной к поверхности с током. Скачок  $\vec{B}_\tau$  происходит вокруг вектора  $\vec{i}$  по правилу правого винта.

$$\text{В системе СИ: } B_{2\tau} - B_{1\tau} = \mu_0 i.$$

Рассмотрим теперь, что происходит с нормальной составляющей  $\vec{B}_n$  поля  $\vec{B}$  на границе с поверхностным током  $\vec{i}$ .

Рассмотрим поток  $\Phi_B$  через поверхность цилиндра настолько малой высоты, что потоком через боковую поверхность цилиндра можно пренебречь. Пусть два доньшка цилиндра находятся с двух сторон поверхности с током.



$$\oint_S (\vec{B}, d\vec{S}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \oint_S B_n dS = 0 \quad \Rightarrow \quad B_{2n}S_0 + B_{1n}S_0 = 0, \text{ где } \vec{n} \text{ —}$$

внешняя нормаль к объему цилиндра.

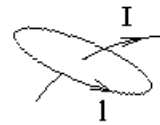
Если для обоих донышек проектировать вектор  $\vec{B}$  на одно и то же направление нормали  $\vec{n}_{1 \rightarrow 2}$ , то для нижнего донышка направление нормали изменится на противоположное, и  $B_{1n} \rightarrow -B_{1n}$ . Тогда

$$B_{2n}S_0 - B_{1n}S_0 = 0 \quad \Rightarrow$$

$B_{2n} - B_{1n} = 0$ , где  $\vec{n} = \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$  — единичный вектор, направленный по нормали к поверхности с током.

### Экзамен. Три формы теоремы о потоке и теоремы о циркуляции поля $B$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\vec{B}) = 0 \\ \oint_S (\vec{B}, d\vec{S}) = 0 \\ B_{2n} - B_{1n} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot}(\vec{B}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \oint_l B_l dl = \frac{4\pi}{c} I \\ B_{2\tau} - B_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} i \end{array} \right.$$



Если в интеграле  $\oint_l B_l dl$  направление обхода контура и направление тока в правой части равенства образуют правый винт, то ток в правой части равенства положителен;  $\vec{n} = \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$  и  $\vec{\tau} = \left[ \begin{array}{l} \vec{i} \\ \vec{i}, \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \end{array} \right]$ .

Сравним с аналогичными соотношениями для поля  $\vec{E}$  в вакууме:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\vec{E}) = 4\pi\rho \\ \oint_S (\vec{E}, d\vec{S}) = 4\pi Q \\ E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot}(\vec{E}) = 0 \\ \oint_l E_l dl = 0 \\ E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \end{array} \right.$$

### Магнитное поле симметричных распределений тока.

#### Экзамен. 1. Поле соленоида бесконечной длины.

Как мы уже обсуждали ранее, составляющую магнитного поля вдоль оси соленоида можно найти по формуле  $B_{\perp} = \frac{i}{c} \Omega$ :

$$B_z = \frac{4\pi}{c} i = \frac{4\pi}{c} nI \quad \text{— магнитное поле внутри соленоида, направленное}$$

вдоль его оси. Здесь  $i = nI$  — плотность поверхностного тока соленоида,  $n$  — число витков на единицу длины соленоида,  $I$  — сила тока в каждом витке соленоида.

$$\vec{B} = \vec{B}_z + \vec{B}_r + \vec{B}_\varphi$$

Докажем теперь строже, что:

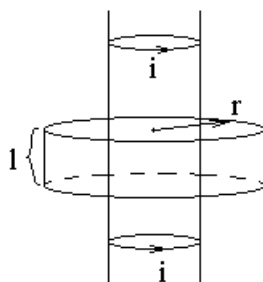
осевая составляющая поля снаружи соленоида  $B_z = 0$  — отсутствует;

$B_r = 0$  — отсутствует радиальная составляющая поля внутри и снаружи соленоида или составляющая, направленная по радиусу в плоскости перпендикулярной оси соленоида;

$B_\varphi = 0$  — отсутствует азимутальная составляющая поля внутри и снаружи соленоида или составляющая направленная вокруг оси соленоида.

Докажем отсутствие радиальной составляющей магнитного поля соленоида.

Рассмотрим поток магнитного поля через поверхность цилиндра:



Поток может создать только составляющая  $\vec{B}_r$ . Составляющая  $\vec{B}_r$  может создать поток только через боковую поверхность цилиндра. Тогда

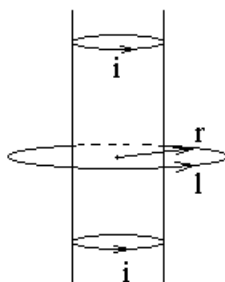
$$\Phi_B = \Phi_{B_r} = B_r \cdot 2\pi r l$$

Это с одной стороны, а с другой стороны поток магнитного поля  $\vec{B}$  через любую замкнутую поверхность равен нулю  $\Phi_B = 0$ . Тогда

$$B_r = 0.$$

Докажем теперь отсутствие азимутальной составляющей магнитного поля соленоида.

Рассмотрим циркуляцию поля  $\vec{B}$  по окружности вокруг оси соленоида:



По теореме о циркуляции магнитного поля

$$\oint_l B_l dl = \frac{4\pi}{c} I, \text{ где } I = 0, \text{ так как нет токов пронизывающих контур}$$

интегрирования.

Составляющая  $B_\varphi$  — это составляющая вокруг оси соленоида, тогда

$$B_l = B_\varphi. \text{ Тогда}$$

$$\oint_l B_\varphi dl = 0 \Rightarrow B_\varphi \oint_l dl = 0 \Rightarrow B_\varphi \cdot 2\pi r = 0 \Rightarrow B_\varphi = 0$$

Отсутствие азимутальной составляющей магнитного поля соленоида доказано.

На самом деле составляющая  $B_\varphi$  снаружи соленоида может быть неравна нулю. Обычно ток подводится к соленоиду на одном его торце, а отводится на другом торце. Тогда, если радиус контура интегрирования больше радиуса обмотки соленоида, то контур пронизывает ток  $I$ , равный току в каждом витке соленоида, так как площадку, ограниченную контуром, протыкает провод с током  $I$ .

В этом случае

$$\oint_l B_l dl = \frac{4\pi}{c} I \quad \Rightarrow \quad B_l \cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c} I \quad \Rightarrow \quad B_\varphi = B_l = \frac{2I}{cr} \quad \text{— поле}$$

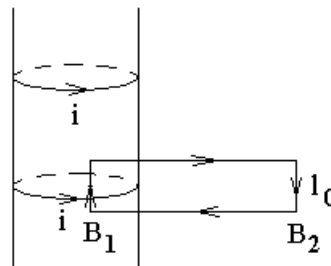
снаружи соленоида совпадает с полем прямого провода с током  $I$ .

Это поле  $B_\varphi = \frac{2I}{cr}$  гораздо меньше, чем поле внутри соленоида

$B_z = \frac{4\pi}{c} nI$ , так как  $2\pi nr \gg 1$ , где  $n$  — число витков на единице длины соленоида,  $nr$  — число витков соленоида на длине равной радиусу соленоида. Обычно полем  $B_\varphi$  пренебрегают, даже когда оно есть. Чтобы  $B_\varphi$  было строго равно нулю нужно сделать обмотку соленоида в два слоя. Один слой намотать, например, снизу вверх, а второй слой, в качестве продолжение провода первого слоя, намотать сверху вниз.

Докажем теперь, что снаружи соленоида нет осевой составляющей магнитного поля  $B_z = 0$ .

Рассмотрим прямоугольный контур, в плоскости которого лежит ось цилиндра.



Горизонтальные участки прямоугольного контура дают нулевой вклад в циркуляцию, так как  $B_r = 0$ . Кроме того, горизонтальные участки находятся в равных условиях, поэтому они давали бы нулевой суммарный вклад в циркуляцию, даже если бы радиальная составляющая магнитного поля была бы отлична от нуля.

Тогда по теореме о циркуляции магнитного поля:



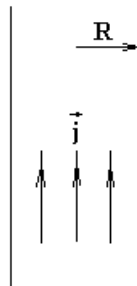
$$\oint_l B_l dl = \frac{4\pi}{c} I \quad \Rightarrow \quad B_{1z} l_0 + (-B_{2z}) l_0 = \frac{4\pi}{c} i l_0$$

$$B_{2z} = B_{1z} - \frac{4\pi}{c} i$$

Но внутри соленоида  $B_{1z} = \frac{4\pi}{c} i$ , тогда снаружи соленоида

$B_{2z} = 0$ , что и требовалось доказать.

**Экзамен. 2. Магнитное поле  $B$  внутри и снаружи длинного цилиндрического проводника с заданной плотностью тока  $j$ .**



$$\vec{B} = \vec{B}_z + \vec{B}_r + \vec{B}_\varphi$$

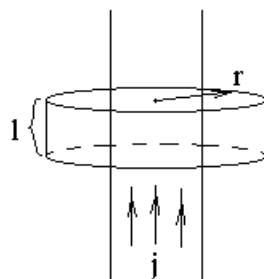
Докажем, что  $B_z = 0$  — отсутствует составляющая поля вдоль провода внутри и снаружи проводника.

По закону Био-Савара  $d\vec{B} = \frac{I}{c} \cdot \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}$ . Заменим  $I d\vec{l} \rightarrow \vec{j} dV$  и получим

$$d\vec{B} = \frac{1}{c} \cdot \frac{[\vec{j}, \vec{r}]}{r^3} \cdot dV \quad \Rightarrow \quad d\vec{B} \perp \vec{j} \quad \Rightarrow \quad dB_z = dB_j = 0$$

$$\Rightarrow \quad B_z = 0.$$

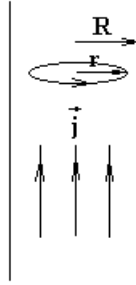
Докажем теперь, что  $B_r = 0$  — отсутствует радиальная составляющая поля внутри и снаружи проводника.



Рассмотрим поток вектора  $\vec{B}$  через поверхность цилиндра. Поток может создавать только составляющая  $B_r$ .

$$0 = \Phi_B = \Phi_{B_r} = B_r \cdot 2\pi r l \quad \Rightarrow \quad B_r = 0$$

Рассмотрим теперь азимутальную составляющую  $B_\varphi$ .

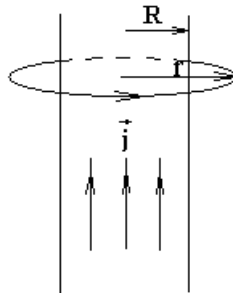


Рассмотрим циркуляцию поля  $\vec{B}$  по контуру в виде окружности в плоскости перпендикулярной оси провода с током. Пусть центр окружности находится на оси провода. Рассмотрим сначала окружность, радиус которой  $r$  меньше радиуса проводника  $R$ .

$$\oint_l B_l dl = \frac{4\pi}{c} I \quad \Rightarrow \quad B_\varphi \cdot l = \frac{4\pi}{c} j \cdot S \quad \Rightarrow \quad B_\varphi \cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c} j \cdot \pi r^2 \quad \Rightarrow$$

$B_\varphi = 2\pi \frac{j}{c} r$  — азимутальная составляющая поля внутри проводника с плотностью тока  $\vec{j}$  при  $r \leq R$ , составляющая поля  $B$  вокруг оси провода.

Рассмотрим теперь окружность, радиус которой  $r$  больше радиуса проводника  $R$ .



$$\oint_l B_l dl = \frac{4\pi}{c} I \quad \Rightarrow \quad B_\varphi \cdot l = \frac{4\pi}{c} j \cdot S \quad \Rightarrow \quad B_\varphi \cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c} j \cdot \pi R^2 \quad \Rightarrow$$

$B_\varphi = 2\pi \frac{j}{c} \cdot \frac{R^2}{r}$  — азимутальная составляющая поля снаружи проводника при  $r \geq R$ , составляющая поля  $B$  вокруг оси провода направленная вокруг тока по правилу правого винта.