

Экзамен. 3 Магнитное поле плоского слоя с током.

Пусть в объеме между двумя параллельными плоскостями текут токи с одинаковой во всех точках плотностью тока \vec{j} .

$$\vec{B} = \vec{B}_j + \vec{B}_n + \vec{B}_\tau$$

Докажем, что $B_j = 0$ — отсутствует составляющая магнитного поля вдоль тока внутри и снаружи плоского слоя.

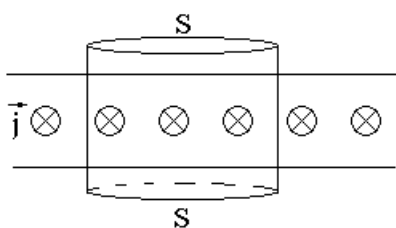
По закону Био-Савара $d\vec{B} = \frac{I}{c} \cdot \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}$. Заменим $I d\vec{l} \rightarrow \vec{j} dV$ и получим

$$d\vec{B} = \frac{1}{c} \cdot \frac{[\vec{j}, \vec{r}]}{r^3} \cdot dV \quad \Rightarrow \quad d\vec{B} \perp \vec{j} \quad \Rightarrow \quad dB_j = 0$$

Тогда $B_j = 0$.

Докажем теперь, что отсутствует составляющая магнитного поля перпендикулярная плоскому слою $B_n = 0$.

Рассмотрим поток магнитного поля через поверхность цилиндра, доньшки которого параллельны плоскому слою и симметрично расположены относительно слоя.



Поток может создавать только составляющая магнитного поля B_n . Эта составляющая создает поток только через доньшки цилиндра. Из симметрии задачи потоки через оба доньшка одинаковые, тогда

$$\Phi_B = \Phi_{B_n} = 2B_n S.$$

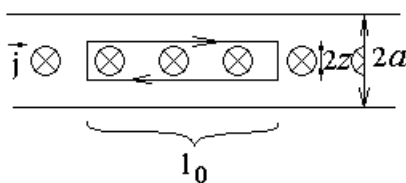
Это с одной стороны, а с другой стороны поток магнитного поля через любую замкнутую поверхность равен нулю $\Phi_B = 0$. Следовательно,

$$B_n = 0 \text{ внутри и снаружи плоского слоя с током.}$$

Осталось найти составляющую B_τ , направленную по касательной к плоскостям слоя и перпендикулярную токам.

Рассмотрим циркуляцию поля \vec{B} по прямоугольному контуру.

Пусть $|z| \leq a$.



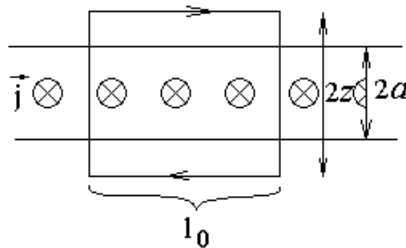
Вклад в циркуляцию дают только горизонтальные отрезки. Вклад двух горизонтальных отрезков одинаков. Тогда

$$\oint_l B_l dl = \frac{4\pi}{c} I \quad \Rightarrow \quad 2B_\tau l_0 = \frac{4\pi}{c} jS \quad \Rightarrow \quad 2B_\tau l_0 = \frac{4\pi}{c} j \cdot 2zl_0 \quad \Rightarrow$$

$$B_\tau = \frac{4\pi}{c} jz \quad \text{— магнитное поле внутри слоя } |z| \leq a \text{ в направлении}$$

параллельном границам слоя и перпендикулярно току.

Пусть теперь $|z| \geq a$.



$$\oint_l B_l dl = \frac{4\pi}{c} I \quad \Rightarrow \quad 2B_\tau l_0 = \frac{4\pi}{c} jS \quad \Rightarrow \quad 2B_\tau l_0 = \frac{4\pi}{c} j \cdot 2al_0$$

\Rightarrow

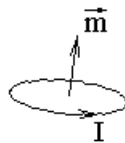
$$B_\tau = \frac{4\pi}{c} ja \quad \text{— магнитное поле снаружи слоя } |z| \geq a \text{ в направлении}$$

параллельном границам слоя и перпендикулярно току. Направление магнитного поля образует правый винт с направлением тока.

Экзамен. Магнитный диполь. Момент сил, действующих на виток с током в однородном магнитном поле.

$$\vec{m} \equiv \frac{I}{c} \vec{S} \quad \text{— определение магнитного дипольного момента тока } I \text{ в}$$

контуре, ограничивающем площадку \vec{S} . Направление дипольного момента образует правый винт с направлением тока.



Факультативная вставка.

Магнитный дипольный момент может быть выражен иначе:

$$\vec{m} \equiv \frac{I}{c} \vec{S} = \frac{I}{2c} \oint_l [\vec{r}, d\vec{l}] = \frac{1}{2c} \int_V [\vec{r}, \vec{j}] dV.$$

В системе СИ: $\vec{m} = I\vec{S}$.

Конец факультативной вставки.

Докажем, что момент сил \vec{M} , действующих на рамку с током в магнитном поле \vec{B} равен:

$$\vec{M} = [\vec{m}, \vec{B}].$$

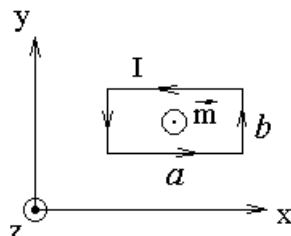
В системе СИ равенство выглядит также.

Это равенство аналогично равенству $\vec{M} = [\vec{p}, \vec{E}]$ в электростатике.

Докажем сначала для прямоугольной рамки с током.

Выберем направление оси z системы координат вдоль вектора \vec{m} (перпендикулярно плоскости рамки), оси x и y повернем вокруг оси z и направим вдоль сторон рамки с током.

Обозначим длину рамки вдоль оси x за a , вдоль оси y — за b .



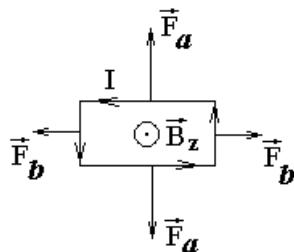
Произвольное магнитное поле \vec{B} разложим на составляющие вдоль осей координат:

$$\vec{B} = \vec{B}_x + \vec{B}_y + \vec{B}_z.$$

Докажем требуемое равенство $\vec{M} = [\vec{m}, \vec{B}]$ отдельно для каждой составляющей поля \vec{B} .

Рассмотрим магнитное поле с одной составляющей $\vec{B} = \vec{B}_z$.

Направление и величина сил на следующем рисунке определяются законом Ампера $d\vec{F} = \frac{I}{c} \cdot [d\vec{l}, \vec{B}]$.



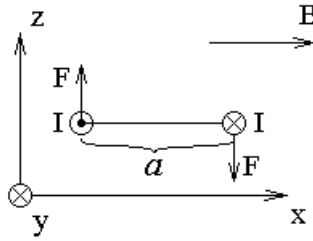
Из рисунка видно, что противоположно направленные силы попарно дают нулевой момент, как равные и противоположно направленные силы, действующие вдоль одной прямой. Следовательно, $\vec{M} = 0$ для всех 4-х сил.

С другой стороны, $[\vec{m}, \vec{B}] = 0$, так как $\vec{m} \uparrow \uparrow \vec{B}$.

Следовательно, при $\vec{B} = \vec{B}_z$ условие $\vec{M} = [\vec{m}, \vec{B}]$ выполнено, так как каждая часть равенства равна нулю.

Рассмотрим теперь магнитное поле вдоль оси x .

$$\vec{B} = \vec{B}_x.$$



На отрезках рамки длиной a , которые направлены вдоль оси x и, соответственно, вдоль поля \vec{B} , сила Ампера равна нулю.

Сумма всех сил равна нулю. При этом условии момент сил не зависит от положения начала координат. Выберем начало координат в середине левого отрезка с током. Тогда плечо для силы Ампера, действующей на левый отрезок, равно нулю, и суммарный момент сил определяется только силой, действующей на правый отрезок. Момент силы $\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$ направлен вдоль оси y , так как вектор \vec{r} направлен слева направо.

Это с одной стороны, а с другой стороны вектор $[\vec{m}, \vec{B}] = [\vec{m}_z, \vec{B}_x]$ также направлен вдоль оси y . Следовательно, $\vec{M} \uparrow\uparrow [\vec{m}, \vec{B}]$.

Покажем, что эти векторы не только одинаково направлены, но и равны по величине.

Момент сил равен произведению силы на плечо

$$M = aF.$$

Подставим сюда выражение для силы из закона Ампера $d\vec{F} = \frac{I}{c} \cdot [d\vec{l}, \vec{B}]$

откуда $F = \frac{I}{c} bB$. Тогда

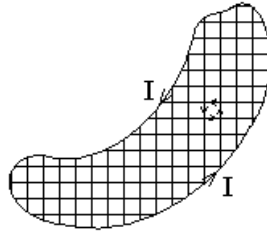
$$M = a \frac{I}{c} bB = \frac{I}{c} SB = |\vec{m}| B = [[\vec{m}, \vec{B}]].$$

Следовательно, равенство $\vec{M} = [\vec{m}, \vec{B}]$ доказано при $\vec{B} = \vec{B}_x$.

Аналогично доказывается, что $\vec{M} = [\vec{m}, \vec{B}]$ при $\vec{B} = \vec{B}_y$. Или можно повернуть оси координат вокруг оси z на $\frac{\pi}{2}$. Теперь равенство $\vec{M} = [\vec{m}, \vec{B}]$ справедливо для поля \vec{B} вдоль новой оси x , значит, оно справедливо и для поля \vec{B} вдоль старой оси y .

Складывая равенства $\vec{M} = [\vec{m}, \vec{B}]$ для трех составляющих вектора \vec{B} , получим, что равенство $\vec{M} = [\vec{m}, \vec{B}]$ выполняется для любого направления вектора \vec{B} и прямоугольной рамки с током.

Любой контур в плоскости можно приблизительно представить, как суперпозицию токов в малых прямоугольных рамках:



Складывая токи прямоугольных рамок, получим ток по краю суммарного контура. Для каждой i -ой прямоугольной рамки доказано, что

$$\vec{M}_i = [\vec{m}_i, \vec{B}].$$

Просуммируем это равенство по всем прямоугольным контурам, по всем i , и получим

$$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i = \sum_i [\vec{m}_i, \vec{B}] = \sum_i \left[\frac{I}{c} \vec{S}_i, \vec{B} \right] = \left[\frac{I}{c} \sum_i \vec{S}_i, \vec{B} \right] = \left[\frac{I}{c} \vec{S}, \vec{B} \right] = [\vec{m}, \vec{B}].$$

Тогда

$$\vec{M} = [\vec{m}, \vec{B}], \text{ что и требовалось доказать.}$$

Для поверхности неплоского контура будем считать равенство $\vec{S} = \sum_i \vec{S}_i$ определением вектора суммарной поверхности, тогда равенство $\vec{M} = [\vec{m}, \vec{B}]$ будет справедливо и для неплоского контура.

Экзамен. Энергия магнитного диполя в магнитном поле.

В электростатике:

$\vec{M} = [\vec{p}, \vec{E}]$ — момент сил, действующих на диполь в электрическом поле.

$W = -(\vec{p}, \vec{E})$ — энергия диполя в электрическом поле.

Эти две формулы в электростатике мы выводили независимо друг от друга. Однако энергия диполя в электрическом поле определяется ориентацией диполя, то есть зависит от его поворота.

Повернуть диполь стремится момент сил.

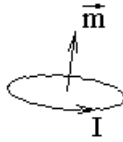
Следовательно, в электростатике формула для энергии однозначно определяется формулой для момента сил.

То есть из формулы $\vec{M} = [\vec{p}, \vec{E}]$ можно доказать $W = -(\vec{p}, \vec{E})$.

Заменим во всех формулах этого доказательства $\vec{p} \rightarrow \vec{m}$ и $\vec{E} \rightarrow \vec{B}$.

Тогда получится, что из формулы $\vec{M} = [\vec{m}, \vec{B}]$ можно доказать $W = -(\vec{m}, \vec{B})$.

Следовательно, $W = -(\vec{m}, \vec{B})$ — энергия магнитного диполя $\vec{m} \equiv \frac{I}{c} \vec{S}$



Интересно, что магнитное поле не потенциально $\text{rot}(\vec{B}) \neq 0$, а магнитные силы потенциальны $W = -(\vec{m}, \vec{B})$.

Это возможно, так как сила Ампера $d\vec{F} = \frac{I}{c} [d\vec{l}, \vec{B}]$ не параллельна магнитному полю \vec{B} .

Экзамен. Сила, действующая на магнитный диполь в неоднородном магнитном поле.

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}W = -\vec{\nabla}(-(\vec{m}, \vec{B})) = \vec{\nabla}(\vec{m}, \vec{B}) \Rightarrow$$

$$\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{m}, \vec{B}) \text{ — сила, действующая на магнитный диполь } \vec{m} \equiv \frac{I}{c} \vec{S}.$$

Для сравнения в электростатике $\vec{F} = (\vec{p}, \vec{\nabla})\vec{E}$, а при условии $\text{rot}(\vec{E}) = 0$ получаем $\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{p}, \vec{E})$.

Факультативно. Векторный потенциал поля точечного магнитного диполя.

$$d\vec{A} \equiv \frac{I}{c} \cdot \frac{d\vec{l}}{r} \text{ — определение векторного потенциала для элемента тока } Id\vec{l},$$

r — расстояние от элемента тока до точки наблюдения.

Тогда для замкнутого контура с током векторный потенциал:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \oint_{l'} \frac{I}{c} \cdot \frac{d\vec{l}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

С учетом того, что $d\vec{l}' = d\vec{r}'$ получим

$$\vec{A}(\vec{r}) = \oint_{l'} \frac{I}{c} \cdot \frac{d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \text{ — векторный потенциал замкнутого контура с током.}$$

Это точное выражение для векторного потенциала, а нас интересует приближенное выражение с учетом того, что расстояние от токов до точки наблюдения гораздо больше, чем размеры контура с током.

Выберем начало координат где-то в области магнитного диполя.

Пусть \vec{r}' — радиус-вектор элемента тока магнитного диполя,

\vec{r} — радиус-вектор точки наблюдения векторного потенциала, создаваемого магнитным диполем.

Для точечного магнитного диполя $r' \ll r$.

Разложим $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ по степеням малого параметра \vec{r}' .

Сделаем это аналогично разложению по x одномерной функции $f(x)$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \approx f(0) + x \cdot \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=0} \\ x \rightarrow \vec{r}' \\ f(x) \rightarrow \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \approx \frac{1}{r} + \left(\vec{r}', \vec{\nabla}' \left. \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right|_{\vec{r}'=0} \right)$$

Заметим, что для любой функции от $(\vec{r} - \vec{r}')$ справедливо равенство $\vec{\nabla}' = -\vec{\nabla}$, так как

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \cdot}{\partial x'} = \frac{\partial \cdot}{\partial(x-x')} \cdot \frac{\partial(x-x')}{\partial x'} = \frac{\partial \cdot}{\partial(x-x')} \cdot (-1) \\ \frac{\partial \cdot}{\partial x} = \frac{\partial \cdot}{\partial(x-x')} \cdot \frac{\partial(x-x')}{\partial x} = \frac{\partial \cdot}{\partial(x-x')} \cdot (+1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{\nabla}' = -\vec{\nabla}$$

Тогда

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \approx \frac{1}{r} + \left(\vec{r}', \vec{\nabla}' \left. \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right|_{\vec{r}'=0} \right) = \frac{1}{r} - \left(\vec{r}', \vec{\nabla} \left. \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right|_{\vec{r}'=0} \right) = \frac{1}{r} - \left(\vec{r}', \vec{\nabla} \frac{1}{r} \right)$$

$$\text{Здесь } \vec{\nabla} \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}, \text{ так как } \left\{ \begin{array}{l} \varphi = \frac{q}{r} \\ \vec{E} = q \frac{\vec{r}}{r^3} \\ \vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi \end{array} \right. \text{ Тогда}$$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \approx \frac{1}{r} - \left(\vec{r}', -\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^3} \cdot (\vec{r}', \vec{r})$$

Подставим это в выражение для векторного потенциала контура с током

$$\vec{A}(\vec{r}) = \oint_{l'} \frac{I}{c} \cdot \frac{d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \text{ и получим}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{I}{c} \cdot \oint_{l'} \frac{d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \approx \frac{I}{c} \cdot \left\{ \oint_{l'} \frac{d\vec{r}'}{r} + \oint_{l'} \frac{(\vec{r}', \vec{r})}{r^3} d\vec{r}' \right\} = \frac{I}{c} \cdot \frac{1}{r} \cdot \oint_{l'} d\vec{r}' + \frac{I}{c} \cdot \frac{1}{r^3} \cdot \oint_{l'} (\vec{r}', \vec{r}) d\vec{r}'$$

Здесь первый интеграл в правой части равенства равен нулю $\oint_{l'} d\vec{r}' = 0$, так

как интеграл $\oint_{l'} d(\cdot) = 0$ равен нулю для любой функции под знаком дифференциала и в частности для \vec{r}' . Тогда

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{I}{cr^3} \cdot \oint_{l'} (\vec{r}', \vec{r}) d\vec{r}'$$

Мы хотим выразить векторный потенциал $\vec{A}(\vec{r})$ через магнитный дипольный момент $\vec{m} \equiv \frac{I}{c} \vec{S}$, где \vec{S} — вектор площадки ограниченной контуром с током I .

С этой целью рассмотрим

$$[\vec{m}, \vec{B}] = \vec{M} = \oint_{l'} d\vec{M} = \oint_{l'} [\vec{r}', d\vec{F}'] = \oint_{l'} \left[\vec{r}', \frac{I}{c} [d\vec{l}', \vec{B}] \right]$$

Здесь в последнем равенстве подставлено выражение для силы Ампера $d\vec{F}' = \frac{I}{c} [d\vec{l}', \vec{B}]$, действующей на элемент тока $I d\vec{l}'$, радиус-вектор которого равен \vec{r}' .

Учтем, что $d\vec{l}' = d\vec{r}'$, и получим

$$[\vec{m}, \vec{B}] = \oint_{l'} \left[\vec{r}', \frac{I}{c} [d\vec{r}', \vec{B}] \right] = \frac{I}{c} \cdot \oint_{l'} [\vec{r}', [d\vec{r}', \vec{B}]].$$

Двойное векторное произведение в правой части равенства преобразуем по правилу "бац минус цап" и получим

$$[\vec{m}, \vec{B}] = \frac{I}{c} \cdot \oint_{l'} d\vec{r}' (\vec{r}', \vec{B}) - \frac{I}{c} \cdot \oint_{l'} \vec{B} (\vec{r}', d\vec{r}') = \frac{I}{c} \cdot \oint_{l'} (\vec{r}', \vec{B}) d\vec{r}' - \frac{I}{c} \vec{B} \cdot \oint_{l'} (\vec{r}', d\vec{r}')$$

Второй интеграл в правой части равенства равен нулю. И действительно,

$$d(\vec{r}', \vec{r}') = (d\vec{r}', \vec{r}') + (\vec{r}', d\vec{r}') = 2(\vec{r}', d\vec{r}') \quad \Rightarrow \quad (\vec{r}', d\vec{r}') = \frac{1}{2} d(\vec{r}', \vec{r}') \quad \Rightarrow$$

$\oint_{l'} (\vec{r}', d\vec{r}') = \frac{1}{2} \cdot \oint_{l'} d(\vec{r}', \vec{r}')$, где последний интеграл равен нулю, так как интеграл

$\oint_{l'} d(\cdot) = 0$ равен нулю для любой функции под знаком дифференциала.

Тогда в выражении для векторного произведения $[\vec{m}, \vec{B}]$ останется только первый интеграл:

$$[\vec{m}, \vec{B}] = \frac{I}{c} \cdot \oint_{l'} (\vec{r}', \vec{B}) d\vec{r}'$$

Это равенство справедливо для любого значения вектора \vec{B} , если считать, что поле \vec{B} одинаковое во всех точках.

Хотя это равенство было получено с использованием закона Ампера $d\vec{F}' = \frac{I}{c} [d\vec{l}', \vec{B}]$, вектор \vec{B} в равенстве $[\vec{m}, \vec{B}] = \frac{I}{c} \cdot \oint_{l'} (\vec{r}', \vec{B}) d\vec{r}'$ может иметь любое

значение, а значит, его можно сделать равным любому наперед заданному вектору, например, вектору \vec{r} .

Следовательно, в равенстве $[\vec{m}, \vec{B}] = \frac{I}{c} \cdot \oint_{l'} (\vec{r}', \vec{B}) d\vec{r}'$ вектор \vec{B} можно

заменить на вектор \vec{r} . В результате получим

$$[\vec{m}, \vec{r}] = \frac{I}{c} \cdot \oint_{l'} (\vec{r}', \vec{r}) d\vec{r}'.$$

Сравним это равенство с полученным выражением для векторного потенциала $\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{I}{cr^3} \cdot \oint_{l'} (\vec{r}', \vec{r}) d\vec{r}'$ и получим

$$\vec{A} = \frac{[\vec{m}, \vec{r}]}{r^3} \text{ — векторный потенциал точечного магнитного диполя, где } \vec{r}$$

— вектор из диполя в точку наблюдения. Формулу без доказательства нужно знать **к экзамену**.

Заметим, что это равенство похоже на потенциал электрического диполя

$$\varphi = \frac{(\vec{p}, \vec{r})}{r^3}.$$

Факультативно. Магнитное поле B точечного магнитного диполя.

$$\vec{B} = \text{rot}(\vec{A}) = \text{rot}\left(\frac{[\vec{m}, \vec{r}]}{r^3}\right) = \left[\vec{\nabla}, \frac{[\vec{m}, \vec{r}]}{r^3}\right] = \left[\vec{\nabla}, \left[\vec{m}, \frac{\vec{r}}{r^3}\right]\right]$$

Правую часть равенства распишем по правилу "бац минус цап" и получим

$$\vec{B} = \vec{m} \left(\vec{\nabla}, \frac{\vec{r}}{r^3}\right) - \frac{\vec{r}}{r^3} (\vec{\nabla}, \vec{m}).$$

Первое слагаемое в правой части равенства равно нулю, так как $\left(\vec{\nabla}, \frac{\vec{r}}{r^3}\right) = \text{div}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = \text{div}(\vec{E}_1)$, где \vec{E}_1 — напряженность поля единичного точечного заряда в начале координат, в точке $\vec{r} = 0$. По теореме Гаусса в дифференциальной форме $\text{div}(\vec{E}) = 4\pi\rho$, а для единичного точечного заряда в начале координат имеем $\rho = 0$ во всех точках кроме точки $\vec{r} = 0$, следовательно, $\text{div}(\vec{E}_1) = 0$ во всех точках, кроме точки $\vec{r} = 0$, тогда и

$$\left(\vec{\nabla}, \frac{\vec{r}}{r^3}\right) = 0 \text{ во всех точках, кроме точки } \vec{r} = 0.$$

Тогда магнитное поле диполя:

$$\vec{B} = -(\vec{m}, \vec{\nabla}) \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

Раскроем правую часть равенства, как производную от произведения \vec{r} на

$$\frac{1}{r^3}:$$

$$\vec{B} = -\frac{1}{r^3}(\vec{m}, \vec{\nabla})\vec{r} - \vec{r}(\vec{m}, \vec{\nabla})\frac{1}{r^3} = -\frac{1}{r^3}(\vec{m}, \vec{\nabla})\vec{r} - \vec{r}\left(\vec{m}, \vec{\nabla}\frac{1}{r^3}\right).$$

Рассмотрим подробнее первое слагаемое правой части равенства:

$$\begin{aligned}(\vec{m}, \vec{\nabla})\vec{r} &= \left(m_x \frac{\partial}{\partial x} + m_y \frac{\partial}{\partial y} + m_z \frac{\partial}{\partial z}\right)(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \\ &= m_x \frac{\partial}{\partial x} x\vec{i} + m_y \frac{\partial}{\partial y} y\vec{j} + m_z \frac{\partial}{\partial z} z\vec{k} = m_x \vec{i} + m_y \vec{j} + m_z \vec{k} = \vec{m}\end{aligned}$$

Тогда

$$\vec{B} = -\frac{\vec{m}}{r^3} - \vec{r}\left(\vec{m}, \vec{\nabla}\frac{1}{r^3}\right).$$

Рассмотрим теперь второе слагаемое:

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r^3}\right) = \vec{\nabla}\left(\left(\frac{1}{r}\right)^3\right) = 3\left(\frac{1}{r}\right)^2 \vec{\nabla}\frac{1}{r}.$$

$$\text{Здесь } \vec{\nabla}\frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}, \text{ так как } \begin{cases} \varphi = \frac{q}{r} \\ \vec{E} = q\frac{\vec{r}}{r^3} \\ \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi \end{cases} \text{ . Тогда}$$

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r^3}\right) = 3 \cdot \left(\frac{1}{r}\right)^2 \cdot \left(-\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = -3\frac{\vec{r}}{r^5}.$$

Подставим это значение в выражение

для магнитного поля \vec{B} точечного магнитного диполя и получим:

$$\vec{B} = -\frac{\vec{m}}{r^3} - \vec{r}\left(\vec{m}, -3\frac{\vec{r}}{r^5}\right) = 3\frac{(\vec{m}, \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3}.$$

$$\vec{B} = 3\frac{(\vec{m}, \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \quad \text{— магнитное поле точечного диполя, где } \vec{m} \equiv \frac{I}{c}\vec{S} \quad \text{—}$$

магнитный дипольный момент, \vec{r} — вектор из диполя в точку наблюдения. Эту формулу без доказательства нужно знать **к экзамену**. Заметим, что это выражение полностью совпадает с выражением для электрического поля,

$$\text{создаваемого электрическим диполем } \vec{E} = 3\frac{(\vec{p}, \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}.$$

$$\vec{B} = 3\frac{(\vec{m}, \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} + \frac{8}{3}\pi \cdot \vec{m} \cdot \delta(\vec{r}) \quad \text{магнитное поле точечного диполя с}$$

учетом поля внутри самого диполя (без доказательства). Но

$$\vec{E} = 3\frac{(\vec{p}, \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} - \frac{4}{3}\pi \cdot \vec{p} \cdot \delta(\vec{r}).$$