## Экзамен. Гипотеза Максвелла о токах смещения.

Не путайте токи смещения со связанными токами намагниченных сред.

Рассмотрим дивергенцию равенства $rot\left(\vec{H}\right)=\frac{4\pi}{c}\vec{j}$.

Дивергенция левой части равенства равна нулю:

$$div\left(rot\left(\vec{H}\right)\right)=\left(\vec{\nabla},\left[\vec{\nabla},\vec{H}\right]\right)=\left(\vec{H},\left[\vec{\nabla},\vec{\nabla}\right]\right)=0.$$

Дивергенция правой части не равна нулю при $\frac{\partial\rho}{\partial t}\neq 0$:

$$div\left(\frac{4\pi}{c}\vec{j}\right)=\frac{4\pi}{c}div\left(\vec{j}\right)=\frac{4\pi}{c}\cdot\left(-\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)\neq 0.$$

Чтобы обобщить уравнение $rot\left(\vec{H}\right)=\frac{4\pi}{c}\vec{j}$ на случай $\frac{\partial\rho}{\partial t}\neq 0$ можно предположить, что

$rot\left(\vec{H}\right)=\frac{4\pi}{c}\vec{j}+\vec{X}$, где $\vec{X}$ — необходимая поправка к уравнению магнитостатики.

$$rot\left(\vec{H}\right)=\frac{4\pi}{c}\vec{j}+\vec{X} \quad =>$$

$$0=div\left(rot\left(\vec{H}\right)\right)=div\left(\frac{4\pi}{c}\vec{j}+\vec{X}\right)=\frac{4\pi}{c}div\left(\vec{j}\right)+div\left(\vec{X}\right).$$

Учтем, что $div\left(\vec{j}\right)=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$ и получим

$$0=-\frac{4\pi}{c}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial t}+div\left(\vec{X}\right)$$

Учтем теперь, что $4\pi\rho=div\left(\vec{D}\right)$ и получим

$$0=-\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\left(div\left(\vec{D}\right)\right)}{\partial t}+div\left(\vec{X}\right)=div\left(\vec{X}-\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)=0 \quad .$$

Из того, что дивергенция некоторого поля равна нулю, вовсе не следует, что само поле равно нулю. Например, $div\left(\vec{B}\right)=0$ не означает равенства нулю магнитного поля $\vec{B}$.

Максвелл сделал предположение, что $\vec{X}-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=0 \quad =>$

$\vec{X}=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$, которое не обязательно следует из того, что $div\left(\vec{X}\right)=div\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)$. Таким образом Максвелл получил:

$$rot\left(\vec{H}\right)=\frac{4\pi}{c}\vec{j}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

Максвелл ввел понятие токов смещения $\vec{j}_{см}\equiv\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$, тогда

$$rot\left(\vec{H}\right)=\frac{4\pi}{c}\left(\vec{j}+\vec{j}_{см}\right)$$

Токи смещение, потому что они выражаются через вектор электрического смещения $\vec{D}$.

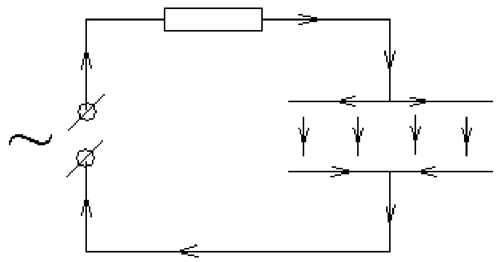
Аналогично $\mathcal{E}_{инд}=-\frac{1}{c}\frac{d\Phi_B}{dt}$ — ЭДС индукции выражается через вектор магнитной индукции $\vec{B}$.

--------

$$\begin{cases} rot\left(\vec{H}\right)=\frac{4\pi}{c}\left(\vec{j}+\vec{j}_{см}\right) \\ div\left(rot\left(\vec{H}\right)\right)=0 \end{cases} \Rightarrow \quad div\left(\vec{j}+\vec{j}_{см}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad \Phi_{\vec{j}+\vec{j}_{см}}=0$$ —

поток вектора $\vec{j}+\vec{j}_{см}$ через любую замкнутую поверхность равен нулю. Тогда линии суммы токов проводимости и токов смещения замкнуты (не рвутся).

Например, в следующей схеме линии токов проводимости замыкаются линиями токов смещения внутри конденсатора.



## <u>Экзамен. Система уравнений Максвелла.</u>

(один из основных вопросов курса)

Уравнения Максвелла справедливы для переменных электромагнитных полей.

$$\begin{cases} div\left(\vec{D}\right)=4\pi\rho \\ rot\left(\vec{E}\right)=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ div\left(\vec{B}\right)=0 \\ rot\left(\vec{H}\right)=\frac{4\pi}{c}\vec{j}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$

— система уравнений Максвелла в дифференциальной форме.

Для решения задач обычно удобнее использовать те же уравнения Максвелла только в интегральной форме:

$$\begin{cases} \oint\limits_S \left(\vec{D}, d\vec{S}\right) = 4\pi Q \\ \oint\limits_l E_l dl = -\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right) \\ \oint\limits_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right) = 0 \\ \oint\limits_l H_l dl = \frac{4\pi}{c} I + \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_S \left(\vec{D}, d\vec{S}\right) \end{cases}$$

Прокомментируем каждое из 4-х уравнений.

Первое из уравнений Максвелла можно записать в виде $\Phi_D = 4\pi Q$. Для полей независящих от времени — это электростатическая теорема Гаусса. Для переменных полей теорема не может быть доказана, но Максвелл предположил, что равенство остается верным и для переменных полей. Все следствия из этого предположения согласуются с опытом.

Второе уравнение $rot\left(\vec{E}\right) = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ — интерпретация Максвелла половины закона электромагнитной индукции Фарадея $\mathcal{E}_{инд} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi_B}{dt}$.

<u>Факультативная вставка.</u>

Заметим, что закон Фарадея содержит полную производную, а уравнение Максвелла в интегральной форме $\oint\limits_l E_l dl = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right)$ содержит частную производную от потока $\Phi_B = \int\limits_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right)$ по времени. Дело в том, что изменение потока при перемещении контура дает вклад в ЭДС индукции $\mathcal{E}_{инд} = \mathcal{E} \equiv \oint\limits_l \left(\vec{E}_{стор}, d\vec{l}\right)$ через силы Лоренца $\vec{F}_Л$, которые рассматриваются, как сторонние силы с напряженностью $\vec{E}_{стор} = \frac{\vec{F}_Л}{q} = \frac{1}{c}\left[\vec{V}, \vec{B}\right]$, но перемещение контура никак не влияет на циркуляцию $\oint\limits_l \left(\vec{E}, d\vec{l}\right)$ поля $\vec{E}$. Отличная от нуля циркуляция поля $\vec{E}$ появляется только при изменении магнитного поля $\vec{B}$, поэтому вклад в циркуляцию поля $\vec{E}$ дает только частная производная по времени от потока $\Phi_B = \int\limits_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right)$ при неизменных координатах, а изменение потока при перемещении контура в клад в циркуляцию поля $\vec{E}$ не дает.

<u>Конец факультативной вставки.</u>

Третье уравнение $\Phi_B = 0$ означает отсутствие магнитных зарядов.

Четвертое уравнение $\oint\limits_l H_l dl = \frac{4\pi}{c} I + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_S \left(\vec{D}, d\vec{S}\right)$ представляет собой теорему о циркуляции поля в магнитостатике дополненное токами смещения Максвелла.

Чтобы уравнения имело смысл решать относительно электрического и магнитного полей, нужно дополнить их так называемыми материальными связями:

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \end{cases}.$$

Кроме того, заряды и токи связаны уравнением непрерывности:

$$div\left(\vec{j}\right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

В некоторых случаях уравнения можно дополнить законом Ома $\vec{j} = \lambda \vec{E}$, если он выполнятся, и если токи не заданы явным образом.

В системе СИ: $$\begin{cases} div\left(\vec{D}\right) = \rho \\ rot\left(\vec{E}\right) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ div\left(\vec{B}\right) = 0 \\ rot\left(\vec{H}\right) = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}.$$

В системе СИ: $$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H} \\ div\left(\vec{j}\right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \\ \vec{j} = \lambda \vec{E} \end{cases}.$$

Факультативная вставка.

Система уравнений Максвелла избыточна. В ней есть лишние уравнения.

Дело в том, что уравнения $\begin{cases} div\left(\vec{D}\right) = 4\pi\rho \\ div\left(\vec{B}\right) = 0 \end{cases}$ не нужны, так как являются следствием другой пары уравнений $\begin{cases} rot\left(\vec{E}\right) = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ rot\left(\vec{H}\right) = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}$.

И действительно. Рассмотрим дивергенцию от уравнения $rot\left(\vec{E}\right) = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

Дивергенция ротора любого поля равна нулю:

$div\left(rot\left(\vec{E}\right)\right) = \left(\vec{\nabla}, \left[\vec{\nabla}, \vec{E}\right]\right) = \left(\vec{E}, \left[\vec{\nabla}, \vec{\nabla}\right]\right) = \left(\vec{E}, 0\right) = 0$, где использовано то, что циклическая перестановка векторов в смешанном скалярно–векторном произведении $\left(\vec{\nabla}, \left[\vec{\nabla}, \vec{E}\right]\right)$ не изменяет его величину. Тогда

$$0 = div\left(rot\left(\vec{E}\right)\right) = div\left(-\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} div\left(\vec{B}\right) \qquad =>$$

$-\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} div\left(\vec{B}\right) = 0 \qquad => \qquad div\left(\vec{B}\right) = const$ — дивергенция поля $\vec{B}$ в каждой точке пространства не изменяется во времени.

Если когда-то в рассматриваемой области не было магнитного поля $\vec{B}$, то и его дивергенция была равна нулю $div\left(\vec{B}\right) = 0$, а затем дивергенция не могла измениться. Следовательно

$$div\left(\vec{B}\right) = 0.$$

Аналогично взяв дивергенцию от уравнения $rot\left(\vec{H}\right) = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ можно получить, что

$$div\left(\vec{D}\right) = 4\pi\rho.$$

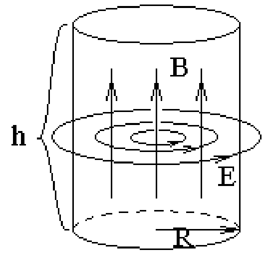
<u>Конец факультативной вставки.</u>

## **<u>Экзамен. Токи Фуко.</u>**

Токи Фуко — это те же токи индукции только в сплошном проводнике, а не в проводящем контуре, как обычные токи индукции.

Рассмотрим проводящий цилиндр в однородном переменном магнитном поле $B = B_0 \cdot \cos\left(\omega t\right)$, которое направлено вдоль оси цилиндра.

Переменное магнитное поле является источником вихревого электрического поля




$$rot\left(\vec{E}\right) = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad <=> \qquad \oint_l E_l dl = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \Phi_B}{\partial t} \qquad =>$$

$$E \cdot 2\pi r = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(\pi r^2 B\right) \qquad =>$$

$$E = -\frac{r}{2c} \cdot \frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{r}{2c} \cdot \frac{\partial\left(B_0 \cdot \cos(\omega t)\right)}{\partial t} = \frac{B_0 \omega}{2c} \cdot r \cdot \sin(\omega t) =>$$

$$E = \frac{B_0 \omega}{2c} \cdot r \cdot \sin(\omega t).$$

Это электрическое поле вызывает токи Фуко

$$j = \lambda E = \frac{\lambda B_0 \omega}{2c} \cdot r \cdot \sin(\omega t).$$

В системе СИ: $j = \lambda E = \dfrac{\lambda B_0 \omega}{2} \cdot r \cdot \sin(\omega t)$.

--------

Интересно рассмотреть среднюю мощность ленц-джоулева тепла, идущего на нагрев цилиндра.

Пусть $\langle \nu \rangle$ — среднее по времени и по объему значение объемной плотности мощности ленц-джоулева тепла.

$\nu = \left(\vec{j}, \vec{E}\right) = \lambda E^2 = \dfrac{\lambda \omega^2 B_0^2}{4c^2} r^2 \sin^2(\omega t)$ — объемная плотность мощности в соответствии с законом Джоуля — Ленца в дифференциальной форме.

Усреднение по времени сомножителя синус в квадрате дает: $\left\langle \sin^2(\omega t) \right\rangle_t = \dfrac{1}{2}$. И действительно, $\sin$ и $\cos$ отличаются только сдвигом фаз на $\dfrac{\pi}{2}$, тогда средние значения их квадратов равны, а сумма средних значений квадратов равна единице, так как $\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t) = 1$.

Тогда

$\langle \nu \rangle_t = \dfrac{\lambda \omega^2 B_0^2}{8c^2} r^2$ — среднее по времени значение объемной плотности мощности ленц-джоулева тепла. Осталось усреднить эту величину по объему цилиндра.

$$\langle \nu \rangle = \int_V \langle \nu \rangle_t \frac{dV}{V} = \frac{\int_V \langle \nu \rangle_t \, dV}{V}$$

Для вычисления интеграла мысленно разобьем объем цилиндра цилиндрическими поверхностями с близкими радиусами, тогда

$$\int_V \langle \nu \rangle_t \, dV = \int_0^R \langle \nu \rangle_t \, h \cdot 2\pi r \, dr = \int_0^R \frac{\lambda \omega^2 B_0^2}{8c^2} r^2 h \cdot 2\pi r \, dr =$$

$$= \frac{\pi\lambda\omega^2 B_0^2 h}{4c^2} \cdot \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi\lambda\omega^2 B_0^2 h}{4c^2} \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{\pi\lambda\omega^2 B_0^2 h}{16c^2} R^4 \qquad =>$$

$$\langle \nu \rangle = \frac{1}{V} \cdot \int_V \langle \nu \rangle_t \, dV = \frac{1}{h \cdot \pi R^2} \cdot \frac{\pi\lambda\omega^2 B_0^2 h}{16c^2} R^4 = \frac{\lambda\omega^2 B_0^2}{16c^2} R^2 \sim R^2 \qquad =>$$

чем больше радиус цилиндра $R$, тем сильнее нагрев в единице объема.

Качественно такой результат можно объяснить тем, что в случае большого радиуса цилиндра токам Фуко есть, где разбежаться.

--------

Сердечник трансформатора делают наборным из большого числа тонких пластин, чтобы уменьшить потери на нагрев сердечника токами Фуко.

Дело в том, что если в первичную обмотку трансформатора подать переменное напряжение, то в сердечнике возникает переменное магнитное поле и токи Фуко.

В наборном сердечнике им трудно разбежаться.

В системе СИ: $\langle \nu \rangle = \dfrac{\lambda {B_0}^2 \omega^2}{16} R^2$

## **Экзамен. Вектор Пойнтинга.**

(вектор Умова — Пойнтинга)

Вектор Пойнтинга — это плотность потока энергии электромагнитного поля или энергия, которая в единицу времени протекает через единичную площадку, перпендикулярную направлению движения энергии.

Энергия в некотором объеме уменьшается, если она вытекает через границу объема.

Объемная плотность энергии электромагнитного поля равна сумме энергий электрического и магнитного полей:

$$w = \frac{\left(\vec{D}, \vec{E}\right)}{8\pi} + \frac{\left(\vec{B}, \vec{H}\right)}{8\pi}.$$

Рассмотрим изменение энергии, например, электрического поля:

$$dw_э = d\left( \frac{\left(\vec{D}, \vec{E}\right)}{8\pi} \right) = \frac{1}{8\pi} \left\{ \left(\vec{D}, d\vec{E}\right) + \left(\vec{E}, d\vec{D}\right) \right\}.$$

Два слагаемых в этой сумме одинаковы по величине. И действительно, для линейного, возможно, анизотропного диэлектрика

$$\vec{D} = \hat{\varepsilon}\vec{E} \qquad => \qquad D_k = \sum_i \varepsilon_{ki} E_i \qquad =>$$

$$\left(\vec{D}, d\vec{E}\right) = \sum_k D_k dE_k = \sum_k \left( \sum_i \varepsilon_{ki} E_i \right) dE_k = \sum_{k,i} \varepsilon_{ki} E_i dE_k$$

$$\left(\vec{E}, d\vec{D}\right) = \sum_i E_i dD_i = \sum_i E_i d\left(\sum_k \varepsilon_{ik} E_k\right) = \sum_{k,i} \varepsilon_{ik} E_i dE_k$$

С учетом $\varepsilon_{ki} = \varepsilon_{ik}$ получаем $\left(\vec{D}, d\vec{E}\right) = \left(\vec{E}, d\vec{D}\right)$. Тогда

$$dw_э = \frac{1}{4\pi}\left(\vec{E}, d\vec{D}\right).$$

Аналогично для энергии магнитного поля $dw_м = \frac{1}{4\pi}\left(\vec{H}, d\vec{B}\right)$.

$dw = \frac{1}{4\pi} \cdot \left\{\left(\vec{E}, d\vec{D}\right) + \left(\vec{H}, d\vec{B}\right)\right\}$ — изменение объемной плотности энергии электромагнитного поля. Эта формула справедлива в более общем случае, чем исходная формула $w = \frac{\left(\vec{D}, \vec{E}\right)}{8\pi} + \frac{\left(\vec{B}, \vec{H}\right)}{8\pi}$. Формула $dw = \frac{1}{4\pi} \cdot \left\{\left(\vec{E}, d\vec{D}\right) + \left(\vec{H}, d\vec{B}\right)\right\}$ справедлива и в случае нелинейной зависимости индукции поля от напряженности и в случае гистерезисной зависимости.

Тогда $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \cdot \left\{\left(\vec{E}, \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) + \left(\vec{H}, \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)\right\}$, куда в правую часть производные по времени можно подставить из уравнений Максвелла

$$\begin{cases} rot\left(\vec{E}\right) = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ rot\left(\vec{H}\right) = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases} \quad =>$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = c \cdot rot\left(\vec{H}\right) - 4\pi\vec{j} \\ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -c \cdot rot\left(\vec{E}\right) \end{cases} \quad =>$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\left\{\left(\vec{E}, c \cdot rot\left(\vec{H}\right) - 4\pi\vec{j}\right) + \left(\vec{H}, -c \cdot rot\left(\vec{E}\right)\right)\right\} \quad =>$$

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = \left(\vec{E}, \vec{j}\right) + \frac{c}{4\pi}\left\{-\left(\vec{E}, rot\left(\vec{H}\right)\right) + \left(\vec{H}, rot\left(\vec{E}\right)\right)\right\} \quad =>$$

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = \left(\vec{E}, \vec{j}\right) + \frac{c}{4\pi}\left\{-\left(\vec{E}, \left[\vec{\nabla}, \underline{\vec{H}}\right]\right) + \left(\vec{H}, \left[\vec{\nabla}, \underline{\vec{E}}\right]\right)\right\}$$

Здесь подчеркнуты величины, на которые действует оператор дифференцирования $\vec{\nabla}$.

В обоих смешанных скалярно–векторных произведениях сделаем циклические перестановки векторов так, чтобы вектор $\vec{\nabla}$ оказался на первом месте, а затем в первом векторном произведении поменяем местами векторы с изменением знака произведения. Тогда

$$-\frac{\partial w}{\partial t}=\left(\vec{j},\vec{E}\right)+\frac{c}{4\pi}\left\{\left(\vec{\nabla},\left[\underline{\vec{E}},\vec{H}\right]\right)+\left(\vec{\nabla},\left[\vec{E},\underline{\vec{H}}\right]\right)\right\}.$$

Два слагаемых в фигурных скобках можно объединить, как производную от произведения:

$$-\frac{\partial w}{\partial t}=\left(\vec{j},\vec{E}\right)+\frac{c}{4\pi}\left(\vec{\nabla},\left[\vec{E},\vec{H}\right]\right),$$

где убраны подчеркивания, так как производные берутся от всех величин, которые стоят за знаком производной $\vec{\nabla}$.

Скалярное произведение вектора $\vec{\nabla}$ на какой-либо другой вектор — это дивергенция другого вектора, тогда

$$-\frac{\partial w}{\partial t}=\left(\vec{j},\vec{E}\right)+div\left(\frac{c}{4\pi}\left[\vec{E},\vec{H}\right]\right).$$

Тогда

$\underline{-\frac{\partial w}{\partial t}=\left(\vec{j},\vec{E}\right)+div\left(\vec{S}\right)}$, где $\underline{\vec{S}\equiv\frac{c}{4\pi}\left[\vec{E},\vec{H}\right]}$ — вектор Пойнтинга. Эти два равенства нужно помнить к экзамену.

Из равенства $-\frac{\partial w}{\partial t}=\left(\vec{j},\vec{E}\right)+div\left(\vec{S}\right)$ виден физический смысл вектора Пойнтинга $\vec{S}$. Чтобы его понять рассмотрим объем, в котором нет потерь на ленц-джоулево тепло, то есть $\left(\vec{j},\vec{E}\right)=0$. Тогда получим равенство $\frac{\partial w}{\partial t}+div\left(\vec{S}\right)=0$. Рассмотрим другое, но очень похожее равенство $\frac{\partial\rho}{\partial t}+div\left(\vec{j}\right)=0$. Это равенство следует, из закона сохранения заряда. Если объемная плотность заряда уменьшается, то заряд вытекает из объема, так что $\vec{j}$ — плотность потока заряда, то есть заряд, протекающий в единицу времени через единичную площадку перпендикулярную току заряда. Равенство $\frac{\partial w}{\partial t}+div\left(\vec{S}\right)=0$ с учетом закона сохранения энергии можно прочитать аналогично. Если объемная плотность энергии уменьшается, то энергия вытекает из объема, так что $\vec{S}$ — плотность потока энергии, то есть энергия, протекающая в единицу времени через единичную площадку перпендикулярную току энергии.

В системе СИ: $\vec{S}\equiv\left[\vec{E},\vec{H}\right]$.

<u>Факультативная вставка.</u>

Равенство $-\frac{\partial w}{\partial t}=\left(\vec{j},\vec{E}\right)+div\left(\vec{S}\right)$ можно уточнить с учетом возможного присутствия батареек или аккумуляторов со сторонними силами с напряженностью $\vec{E}_{стор}$.

Рассмотрим закон Джоуля — Ленца в дифференциальной форме с учетом сторонних сил:

$$\nu = \left(\vec{j}, \vec{E} + \vec{E}_{стор}\right) \quad => \quad \left(\vec{j}, \vec{E}\right) = \nu - \left(\vec{j}, \vec{E}_{стор}\right) \quad =>$$

$$\left(\vec{j}, \vec{E}_{стор}\right) - \frac{\partial w}{\partial t} = \nu + div\left(\vec{S}\right)$$

Это же уравнение в интегральной форме примет следующий вид:

$$\sum_i \mathcal{E}_i I_i - \frac{\partial W}{\partial t} = N + \oint_S \left(\frac{c}{4\pi}\left[\vec{E}, \vec{H}\right], d\vec{S}\right),$$

где в единицу времени энергия ЭДС и энергия поля расходуются на нагрев (ленц-джоулево тепло) и вытекает через границу объема. Здесь $\mathcal{E}_i$ — любые другие ЭДС, кроме ЭДС индукции (батарейки, аккумуляторы), работа которых добавляется к уменьшению энергии электромагнитного поля.

Из последней формулы также следует физический смысл вектора Пойнтинга. Вектор Пойнтинга — это плотность потока энергии или энергия, которая в единицу времени протекает через единичную площадку перпендикулярную направлению движения энергии.

Заметим, что для одного фотона

$$\left.\begin{aligned} W &= mc^2 \\ p &= mc \end{aligned}\right\} \quad => \quad p = \frac{W}{c} = \frac{h\nu}{c}.$$

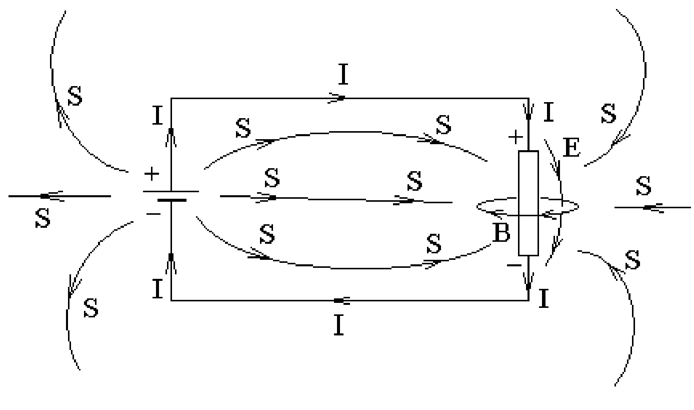
Из равенств $\begin{cases} \vec{S} = \dfrac{c}{4\pi}\left[\vec{E}, \vec{H}\right] \\ p = \dfrac{W}{c} \end{cases}$ следует, что

$$\frac{\vec{S}}{c} = \frac{1}{4\pi}\left[\vec{E}, \vec{H}\right]$$ — плотность потока импульса.

<u>Конец факультативной вставки.</u>

## <u>Экзамен. Примеры движения энергии электромагнитного поля.</u>

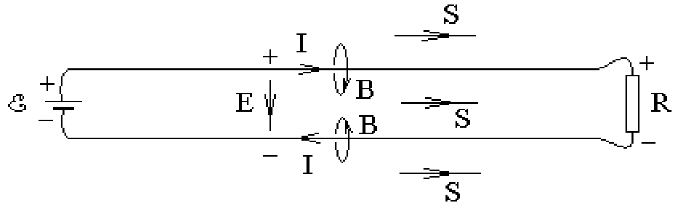
<u>1. Поле вокруг резистора с током.</u>



$$\vec{S}=\frac{c}{4\pi}\left[\vec{E},\vec{H}\right].$$

Линии поля $\vec{S}$ втекают в резистор со всех сторон, а из батареи ЭДС — вытекают.

2. Двухпроводная линия.




Энергия распространяется от ЭДС к нагрузке рядом с проводами линии, а не по проводам.

Есть два способа описания одной и той же энергии:

1). Энергия зарядов, которая передается по проводам.

2). Энергия поля, которая проходит рядом с проводами.

Энергия зарядов — это потенциальная энергия $W=q\varphi$.

Если рассматривать переменные поля, то поле не потенциально. Поэтому у зарядов нет энергии в обычном смысле. Остается только энергия поля.

Энергию зарядов можно рассматривать до тех пор, пока $r \ll \lambda$, где $r$ — размер электрической схемы. Так для частоты 50 Гц: $\lambda=\frac{c}{\nu}$ = (300000 км/с) / (50 1/с) = 6000 км.

Рассмотрим источник переменного напряжения, в котором потенциалы на контактах изменяются синусоидально в противофазе друг другу. Пусть, для определенности, напряжение изменяется с частотой 50 Гц. Источник напряжения присоединен к длинной двухпроводной линии, а на удаленном конце двухпроводная линия короткозамкнута.

$$L=\frac{\lambda}{4}$$

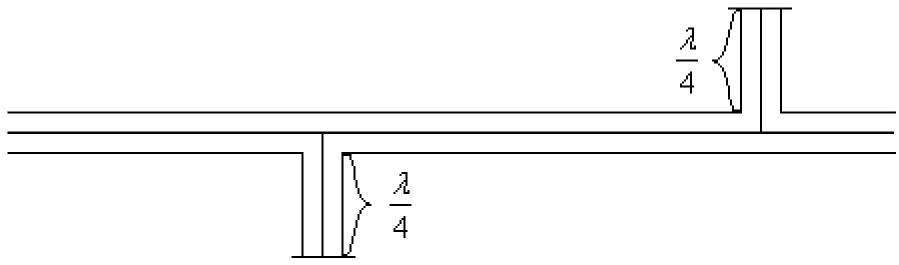
Пусть длина двухпроводной линии $L=\frac{\lambda}{4}$ = 1500 км. В таком случае оказывается, что короткое замыкание на удаленном конце линии будет восприниматься источником напряжения, как разрыв, а не как короткое замыкание.

Длина $\frac{\lambda}{4}$ эквивалентна сдвигу фаз $\frac{\pi}{2}$. Пусть в какой-то момент времени потенциал верхней клеммы источника максимален. На правом конце линии распространяющийся потенциал отстает по фазе на $\frac{\pi}{2}$, а доходя до нижней клеммы отстает еще на $\frac{\pi}{2}$. В сумме отставание фазы на $\pi$, что означает, что сигнал от верхней клеммы приходит к нижней клемме в противоположной фазе. То есть, когда на верхней клемме максимальный потенциал, к нижней клемме только доходит предыдущее минимальное значение потенциала. В этот же момент времени источник напряжения подает на нижнюю клемму минимальный потенциал, тот же, что и пришедший по двухпроводной линии. Следовательно, ток от источника не течет.

В этом смысле источник напряжения воспринимает короткое замыкание на удаленном конце линии, как разрыв.

В радиолокационных станциях старого типа использовалось излучение с длиной волны $\lambda = (10 \div 100)$ см. Сигнал от генератора к антенне передавался по коаксиальному кабелю, который состоит из центрального провода и цилиндрической проводящей оболочки вокруг него. Обычно оболочку называют оплеткой, что действительно справедливо только для гибкого коаксиального кабеля. К антенне от генератора подавалась большая мощность. При этом любой диэлектрик в пространстве между центральной жилой и оплеткой не выдерживает разогрева. Если же пространство между центральной жилой и оплеткой оставить пустым, то непонятно, как удержать центральную жилу по центру оплетки.

Решение было найдено в виде четвертьволнового стакана.




Конец четвертьволнового стакана является коротким замыканием, а сам стакан воспринимается сигналом центральной жилы, как разрыв, а не как короткое замыкание. По ходу распространения сигнала таких стаканов может быть несколько. В настоящее время четвертьволновым стаканом называют несколько иную конструкцию, а то, что рассмотрели мы, называется четвертьволновым штырем.