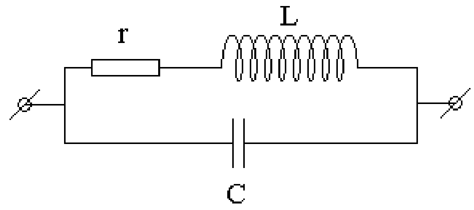
Экзамен. Резонанс токов.

Резонанс токов наблюдается в параллельном колебательном контуре.

Параллельный колебательный контур — это двухполюсник, внутри которого катушка индуктивности и конденсатор соединены параллельно.

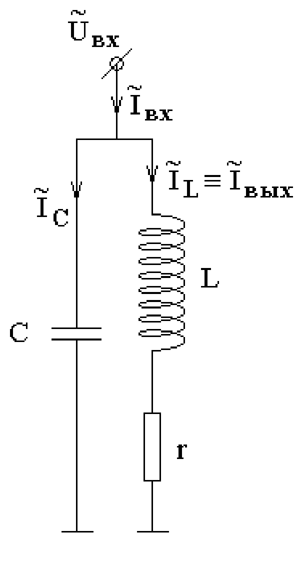


Резонанс токов состоит в том, что амплитуда тока на выходе схемы, как функция частоты, имеет узкий пик (при неизменной амплитуде тока на входе).

В данном случае ток на входе схемы — это ток, который протекает через обе клеммы двухполюсника, а током на выходе схемы считают круговой ток внутри LC-контура. Для выходного тока катушка индуктивности и конденсатор включены последовательно и это их общий ток. Входной ток схемы тоже как-то протекает через эти же элементы схемы, поэтому силы тока через конденсатор и катушку индуктивности несколько отличаются друг от друга.

Нам будет удобнее считать, что выходной ток схемы — это ток, протекающий через катушку индуктивности. При таком выборе формулы для резонанса токов будут очень похожи на формулы резонанса напряжений.

Обычно один полюс двухполюсника параллельного колебательного контура является общим проводом схемы. Рассмотрим именно такой вариант.



Входной ток $\tilde{I}_{вх}$ разветвляется на ток конденсатора $\tilde{I}_C$ и ток катушки индуктивности $\tilde{I}_L$. Тогда уравнение Кирхгофа для узла примет следующий вид:

$$\sum_i I_i = 0 \qquad => \qquad \tilde{I}_{вх} = \tilde{I}_C + \tilde{I}_L$$

Силу тока через конденсатор и катушку индуктивности можно выразить через комплексное напряжение и комплексное сопротивление. Тогда

$$\begin{cases} \tilde{I}_C = \dfrac{\widetilde{U}_{вх}}{\widetilde{Z}_C} \\ \tilde{I}_L = \dfrac{\widetilde{U}_{вх}}{\widetilde{Z}_L + r} \end{cases} \quad =>$$

$$\tilde{I}_{вх} = \frac{\widetilde{U}_{вх}}{\widetilde{Z}_C} + \frac{\widetilde{U}_{вх}}{\widetilde{Z}_L + r} = \frac{\widetilde{U}_{вх}}{\dfrac{1}{i\omega C}} + \frac{\widetilde{U}_{вх}}{i\omega L + r} = \widetilde{U}_{вх}\left(i\omega C + \frac{1}{r + i\omega L} \right)$$

Сравним этот входной ток с выходным током:

$$\tilde{I}_{вых} = \tilde{I}_L = \frac{\widetilde{U}_{вх}}{\widetilde{Z}_L + r} = \frac{\widetilde{U}_{вх}}{r + i\omega L}.$$

$\widetilde{K}_I \equiv \dfrac{\tilde{I}_{вых}}{\tilde{I}_{вх}}$ — комплексный коэффициент передачи по току.

$$\widetilde{K}_I \equiv \frac{\tilde{I}_{вых}}{\tilde{I}_{вх}} = \frac{\dfrac{\widetilde{U}_{вх}}{r + i\omega L}}{\widetilde{U}_{вх}\left(i\omega C + \dfrac{1}{r + i\omega L} \right)} = \frac{\dfrac{1}{r + i\omega L}}{i\omega C + \dfrac{1}{r + i\omega L}} =$$

$$= \frac{1}{i\omega C\left(r + i\omega L \right) + 1} = \frac{\dfrac{1}{i\omega C}}{r + i\omega L + \dfrac{1}{i\omega C}} \quad =>$$

$$\widetilde{K}_I = \frac{\dfrac{1}{i\omega C}}{r + i\omega L + \dfrac{1}{i\omega C}}$$

Это выражение полностью совпадает с выражением для комплексного коэффициента передачи по напряжению в вопросе "Резонанс напряжений". Поэтому все дальнейшие формулы будут аналогичны в этих двух вопросах.

$K_I \equiv \dfrac{I_{0\_вых}}{I_{0\_вх}}$ — вещественный коэффициент передачи по току.

Вещественный коэффициент передачи по току равен модулю комплексного коэффициента передачи по току. И действительно:

$$\left| \widetilde{K}_I \right| \equiv \left| \frac{\tilde{I}_{вых}}{\tilde{I}_{вх}} \right| = \left| \frac{\tilde{I}_{0\_вых}\, e^{i\omega t}}{\tilde{I}_{0\_вх}\, e^{i\omega t}} \right| = \left| \frac{\tilde{I}_{0\_вых}}{\tilde{I}_{0\_вх}} \right| = \frac{I_{0\_вых}}{I_{0\_вх}} = K_I$$

Тогда

$$K_I = \left| \widetilde{K}_I \right| = \left| \frac{\dfrac{1}{i\omega C}}{r + i\omega L + \dfrac{1}{i\omega C}} \right| = \frac{\dfrac{1}{\omega C}}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C} \right)^2}}$$

Знаменатель дроби минимален при условии $\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0$ =>

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ — резонансная частота колебательного контура одинаковая для параллельного и последовательного колебательного контура.

$K_I(\omega_0) = \frac{\frac{1}{\omega_0 C}}{r} = \frac{\frac{\sqrt{LC}}{C}}{r} = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{r} = \frac{\rho}{r}$, где $\rho \equiv \sqrt{\frac{L}{C}}$ — волновое сопротивление колебательного контура.

При условии $\rho >> r$ получаем, что $K_I >> 1$ или $I_{0\_вых} >> I_{0\_вх}$ — это и есть резонанс токов.

Факультативно. Напряжение на выходе линейной схемы при произвольной зависимости напряжения на входе от времени (второй подход).

В математике есть операции прямого и обратного преобразования Фурье:

$$\begin{cases} \tilde{y}_0(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{y}(t) \cdot e^{-i\omega t} dt \\ \tilde{y}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{y}_0(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega \end{cases}$$

Применим прямое преобразование Фурье к напряжению на входе схемы:

$$\widetilde{U}_{0\_вх}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} U_{вх}(t) \cdot e^{-i\omega t} dt.$$

Здесь $\widetilde{U}_{0\_вх}(\omega) \cdot d\omega$ — комплексная амплитуда входного напряжения в полосе частот от ω до $\omega + d\omega$, что видно из обратного преобразования Фурье:

$$U_{вх}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{U}_{0\_вх}(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega.$$

Комплексная амплитуда напряжения на выходе схемы для каждой частоты сигнала выражается через комплексную амплитуду на входе и комплексный коэффициент передачи:

$\widetilde{U}_{0\_вых}(\omega) = \widetilde{K}_U(\omega) \cdot \widetilde{U}_{0\_вх}(\omega)$, где $\widetilde{K}_U$ — комплексный коэффициент передачи по напряжению, который мы умеем находить. Сделаем соответствующую замену в обратном преобразовании Фурье для выходного напряжения:

$$U_{вых}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{U}_{0\_вых}(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega \qquad =>$$

$$U_{вых}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{K}_U(\omega) \cdot \widetilde{U}_{0\_вх}(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega$$

Тогда

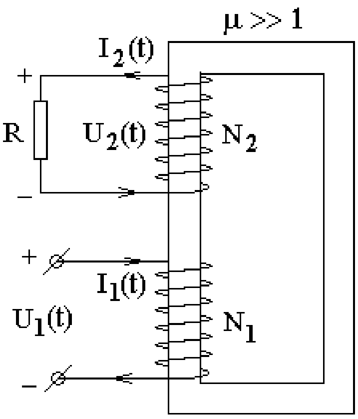
$$\begin{cases} \widetilde{U}_{0\_вх}(\omega) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} U_{вх}(t) \cdot e^{-i\omega t} dt \\ U_{вых}(t) = \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{K}_U(\omega) \cdot \widetilde{U}_{0\_вх}(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega \end{cases}.$$

Эти два равенства позволяют найти напряжение на выходе схемы $U_{вых}(t)$ через напряжение на ее входе $U_{вх}(t)$, если мы знаем комплексный коэффициент передачи схемы $\widetilde{K}_U(\omega)$, как функцию частоты ω.

<u>**Экзамен. Трансформатор.**</u>

(в системе СИ)

Трансформатор — две катушки на общем замкнутом сердечнике с высокой магнитной проницаемостью $\mu >> 1$.



Чтобы правильно найти связи между величинами нужно внимательно следить за их знаками.

Правило знаков.

1. Пусть обе катушки намотаны в одну сторону и расположены на одной стороне сердечника.
2. $U_1 > 0$, если на верхнем проводе "+" напряжения.
3. $U_2 > 0$, если на верхнем проводе "+" напряжения.
4. $I_1 > 0$, если ток через катушку течет сверху вниз.
5. $I_2 > 0$, если наоборот, ток через катушку течет снизу вверх.

Дело в том, что при этом ток через сопротивление R течет сверху вниз и $U_2 = RI_2$. Иначе было бы $U_2 = -RI_2$.

Обозначим за Φ поток поля $\vec{B}$ через один виток.

$$\begin{cases} \mathcal{E}_{инд\_1} = -\dfrac{d\left(N_1\Phi\right)}{dt} \\ \mathcal{E}_{инд\_2} = -\dfrac{d\left(N_2\Phi\right)}{dt} \\ U_1 + \mathcal{E}_{инд\_1} = 0 \\ U_2 + \mathcal{E}_{инд\_2} = 0 \\ \Phi = BS \\ B = \mu_0\mu H \\ Hl = N_1I_1 - N_2I_2 \\ U_2 = RI_2 \end{cases} \qquad (1) \qquad \Rightarrow$$

Из средней четверки системы из восьми уравнений выразим четыре неизвестных

$$\begin{cases} \mathcal{E}_{инд\_1} = -U_1 \\ \mathcal{E}_{инд\_2} = -U_2 \\ B = \mu_0\mu H \\ \Phi = S\cdot\mu_0\mu H \end{cases}$$

и подставим их в остальные уравнения. Тогда получим систему из четырех уравнений

$$\begin{cases} U_1 = N_1 S\mu_0\mu \dot{H} \\ U_2 = N_2 S\mu_0\mu \dot{H} \\ Hl = N_1I_1 - N_2I_2 \\ U_2 = RI_2 \end{cases} \qquad (2)$$

Разделим второе уравнение системы (2) на первое и получим

$\dfrac{U_2}{U_1} = \dfrac{N_2}{N_1} \quad \Leftrightarrow \quad U_2 = \dfrac{N_2}{N_1}U_1 \quad \Leftrightarrow \quad U_2 = nU_1$, где $n \equiv \dfrac{N_2}{N_1}$ — коэффициент трансформации.

Решения для неизвестных величин будем подчеркивать $\underline{U_2 = \dfrac{N_2}{N_1}U_1}$.

Напряжение в каждой обмотке пропорционально числу витков $\dfrac{U_2}{U_1} = \dfrac{N_2}{N_1}$ при любой зависимости $U_1\left(t\right)$.

Однако на опыте, если $U_1 = const$, то $U_2 = 0$. Причина в том, что мы не учли активное сопротивление первичной обмотки. В стационарном случае, каким бы малым ни было сопротивление первичной обмотки, постоянное напряжение выделяется именно на нем, а не на индуктивности, поэтому постоянное напряжение не переходит во вторичную обмотку.

В четвертое уравнение $U_2 = RI_2$ системы (2) подставим $U_2 = \frac{N_2}{N_1}U_1$ и получим

$$I_2 = \frac{N_2}{N_1} \cdot \frac{U_1}{R}.$$

Из первого уравнения $U_1 = N_1 S \mu_0 \mu \dot{H}$ системы (2) выразим напряженность магнитного поля в сердечнике и получим

$$H = \frac{1}{\mu_0 \mu N_1 S}\int_0^t U_1(t')\,dt'.$$

Из третьего уравнения $U_1 + \mathcal{E}_{инд\_1} = 0$ системы (1) получим

$$\mathcal{E}_{инд\_1} = -U_1.$$

Из четвертого уравнения $U_2 + \mathcal{E}_{инд\_2} = 0$ системы (1) получим

$$\mathcal{E}_{инд\_2} = -U_2 = -\frac{N_2}{N_1}U_1 \qquad =>$$

$$\mathcal{E}_{инд\_2} = -\frac{N_2}{N_1}U_1$$

Из шестого уравнения $B = \mu_0 \mu H$ системы (1) получим

$$B = \mu_0 \mu H = \frac{1}{N_1 S}\int_0^t U_1(t')\,dt' \qquad =>$$

$$B = \frac{1}{N_1 S}\int_0^t U_1(t')\,dt'$$

Из пятого уравнения $\Phi = BS$ системы (1) получим

$$\Phi = BS = \frac{1}{N_1}\int_0^t U_1(t')\,dt' \quad =>$$

$$\Phi = \frac{1}{N_1}\int_0^t U_1(t')\,dt'$$

Из седьмого уравнения $Hl = N_1 I_1 - N_2 I_2$ системы (1) получим

$$I_1 = \frac{N_2}{N_1}I_2 + \frac{Hl}{N_1} = \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 \frac{U_1}{R} + \frac{l}{\mu_0 \mu S N_1^2}\int_0^t U_1(t')\,dt' \qquad =>

$$I_1 = \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 \frac{U_1}{R} + \frac{l}{\mu_0 \mu S N_1^2} \int_0^t U_1(t')\,dt'$$

Проанализируем эту формулу при $R \to \infty$ =>

$$I_1 = \frac{l}{\mu_0 \mu S N_1^2} \int_0^t U_1(t')\,dt' \Rightarrow \quad U_1 = \frac{\mu_0 \mu N_1^2 S}{l} \dot{I}_1 = L_{11} \dot{I}_1$$

$$L_{11} = \frac{\mu_0 \mu N_1^2 S}{l} \quad \Rightarrow$$

$$I_1 = \frac{U_1}{\left(\frac{R}{n^2}\right)} + \frac{1}{L_{11}} \int_0^t U_1(t')\,dt',$$

где $n = \frac{N_2}{N_1}$ — коэффициент трансформации.

Условие $R \to \infty$ — это условие отсутствия нагрузки во вторичной обмотке трансформатора. Ток первичной обмотки при этом называется холостым током трансформатора. Для уменьшения холостого тока нужно стремиться увеличить индуктивность первичной обмотки $L_{11} \to \infty$, при этом $I_1 = \frac{U_1}{\left(\frac{R}{n^2}\right)}$.

Тогда можно сказать, что величина $\frac{R}{n^2}$ — это сопротивление нагрузки, пересчитанное в первичную обмотку.

При $L_{11} \to \infty$ => $I_1 \approx \frac{U_1}{\left(\frac{R}{n^2}\right)} = n\frac{nU_1}{R} = n\frac{U_2}{R} = nI_2$ =>

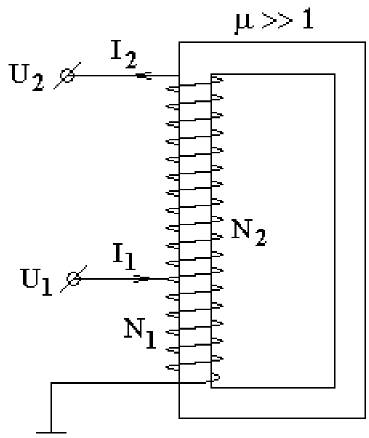
$I_1 \approx nI_2$ — трансформатор тока.

Основные формулы для трансформатора:

$\begin{cases} \frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1} \\ U_1 I_1 \approx U_2 I_2 \end{cases}$, где второе уравнение означает, что вся мощность, подводимая к первичной обмотке, передается во вторичную обмотку.

Факультативно. Автотрансформатор.

Автотрансформатор имеет одну обмотку вместо двух обмоток трансформатора. Одна обмотка автотрансформатора имеет три отвода. Один из трех проводов — общий провод.

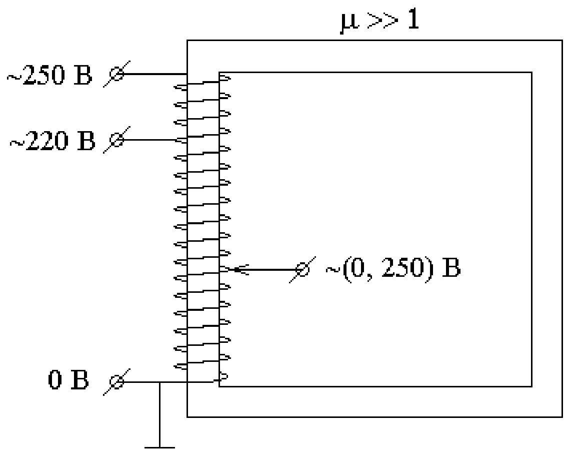


На приведенном рисунке первичная обмотка трансформатора представляет собой часть вторичной обмотки, а вторичная обмотка — это вся обмотка трансформатора. Автотрансформатор можно включить и наоборот.

Основные формулы автотрансформатора такие же, как и для обычного трансформатора $\begin{cases} \dfrac{U_2}{U_1} = \dfrac{N_2}{N_1} \\ U_1 I_1 \approx U_2 I_2 \end{cases}$.

Заметим, что в общей части обмотки токи первичной и вторичной обмоток вычитаются друг из друга. Это важно для расчета максимально допустимых токов обмоток трансформатора.

<u>Факультативно. Лабораторный автотрансформатор (ЛАТР).</u>



От сети переменного тока 220 Вольт на лабораторный автотрансформатор подается напряжение между клеммами обозначенными на рисунке, как "0 В" и "~220 В". Между клеммами "0 В" и "~250 В" можно снять напряжение 250 Вольт. Кроме трех рассмотренных отводов "0 В", "~220 В" и "~250 В" единственная обмотка лабораторного автотрансформатора имеет отвод в виде скользящего контакта. При перемещении контакта между ним и клеммой "0 В" образуется напряжение, которое можно изменять в пределах от нуля до 250 Вольт.

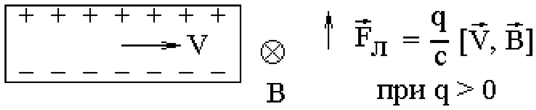
Экзамен. Преобразование электрического и магнитного полей при переходе в движущуюся систему отсчета.

(нерелятивистский случай, система СГС Гаусса)

Нестрогий вывод.

Рассмотрим проводник, который движется в магнитном поле $\vec{B}$ со скоростью $\vec{V}$ относительно системы отсчета K.

Свободные заряды внутри проводника движутся вместе с проводником, и на них действует сила Лоренца $\vec{F}_Л = \frac{q}{c}\left[\vec{V},\vec{B}\right]$. Сила Лоренца сдвигает свободные заряды и приводит к появлению поверхностных зарядов σ на проводнике.



Поверхностные заряды создают электрическое поле $\vec{E}_\sigma$ внутри проводника.

Сила Лоренца и сила Кулона со стороны поля $\vec{E}_\sigma$ уравновешивают друг друга для оставшихся свободных зарядов внутри проводника.

Тогда $\quad q\vec{E}_\sigma + \frac{q}{c}\left[\vec{V},\vec{B}\right] = 0 \quad$ =>

$\vec{E}_\sigma = -\frac{1}{c}\left[\vec{V},\vec{B}\right]$ — поле поверхностных зарядов σ. Здесь значок σ поясняет причину возникновения электрического поля.

Рассмотрим теперь это же явление в системе отсчета K', которая движется вместе с проводником.

В системе K' заряды покоятся, следовательно, сила Лоренца равна нулю. Равнодействующая всех сил равна нулю, так как заряды покоятся. Следовательно, сила Кулона со стороны электрического поля $\vec{E}'$ в K' равна нулю. $\quad \vec{E}' = 0$.

В системе отсчета K есть поверхностные заряды. Их плотность при переходе в систему K' почти не изменяется, так как заряды не изменяются, а размеры проводника изменяются мало. Эти поверхностные заряды создают электрическое поле $\vec{E}'_{\sigma'}$ в K'.

Чтобы суммарное поле было равно нулю $\vec{E}' = 0$ должно существовать еще одно поле в K' — поле $\vec{E}'_B$, причина которого в том, что в системе K есть магнитное поле $\vec{B}$.

$$\vec{E}' = \vec{E}'_{\sigma'} + \vec{E}'_B = 0 \qquad => \qquad \vec{E}'_B = -\vec{E}'_{\sigma'} \approx -\vec{E}_\sigma = \frac{1}{c}\cdot\left[\vec{V},\vec{B}\right]$$

В общем случае, если есть какие-то заряды в системе *K*, то эти заряды есть и в системе *K′*, их поле $\vec{E}$ в обеих системах примерно одинаково. Тогда с учетом добавки $\vec{E}_B'$ поле в *K′*:

$$\vec{E}' = \vec{E} + \frac{1}{c}\left[\vec{V}, \vec{B}\right].$$

Найдем теперь изменение поля $\vec{B}$ при переходе в движущуюся систему отсчета.

Рассмотрим поле точечного заряда q, покоящегося в системе отсчета *K*:

$$\begin{cases} \vec{E} = q\dfrac{\vec{r}}{r^3} \\ \vec{B} = 0 \end{cases}.$$

Пусть система отсчета *K′* движется относительно системы *K* со скоростью $\vec{V}$.

Тогда в системе *K′* скорость заряда $\vec{V}' = -\vec{V}$.

Движущийся в *K′* заряд, как элемент тока, создает магнитное поле $\vec{B}_E'$ в соответствии с законом Био-Савара $d\vec{B} = \frac{I}{c} \cdot \frac{\left[d\vec{l}, \vec{r}\right]}{r^3}$. Заменим элемент тока $Id\vec{l} \to q\vec{V}$ и получим:

$$\vec{B}_E' = \frac{q}{c}\frac{\left[\vec{V}', \vec{r}'\right]}{r'^3} = \frac{q}{c}\frac{\left[\vec{V}', \vec{r}\right]}{r^3} = \frac{q}{c}\frac{\left[\left(-\vec{V}\right), \vec{r}\right]}{r^3} = -\frac{1}{c}\left[\vec{V}, q\frac{\vec{r}}{r^3}\right] = -\frac{1}{c}\left[\vec{V}, \vec{E}\right].$$

Здесь $\vec{r}' \approx \vec{r}$, если пренебречь релятивистским сжатием.

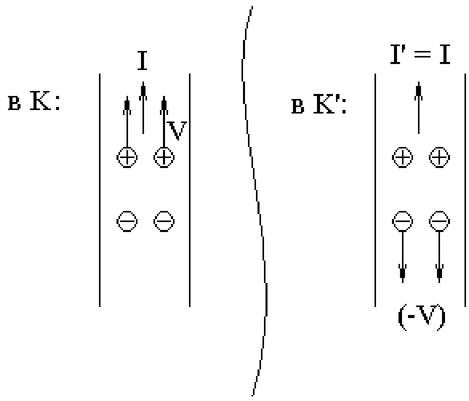
Это поле $\vec{B}_E'$ появляется в системе *K′* только потому, что есть поле $\vec{E}$ в *K*.

Заметим, что сила тока в незаряженном проводнике почти не изменяется при переходе из одной системы отсчета в другую.

Пусть, например, в нейтральном проводнике отрицательные заряды неподвижны, а положительные движутся со скоростью $\vec{V}$.

Пусть система отсчета *K′* движется относительно системы *K* с той же скоростью $\vec{V}$.

Тогда в *K′* положительные заряды неподвижны, а отрицательные движутся со скоростью $\left(-\vec{V}\right)$. Сила тока в обоих случаях одинакова.



Если токи одинаковые, то и их магнитные поля одинаковы.

Пренебрегая релятивистским сжатием, получаем, что токи в незаряженных проводниках создают одинаковое магнитное поле в разных системах отсчета.

Тогда магнитные поля в двух системах отсчета отличаются на величину $\vec{B}'_E = -\frac{1}{c}\left[\vec{V},\vec{E}\right]$:

$$\vec{B}' = \vec{B} - \frac{1}{c}\left[\vec{V},\vec{E}\right].$$

Суммируя выводы, получаем, что в нерелятивистском случае $V \ll c$:

$$\begin{cases} \vec{E}' = \vec{E} + \frac{1}{c}\left[\vec{V},\vec{B}\right] \\ \vec{B}' = \vec{B} - \frac{1}{c}\left[\vec{V},\vec{E}\right] \end{cases}.$$