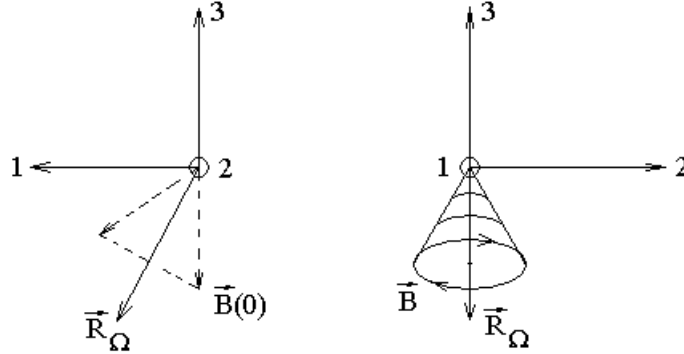


Динамический Штарк-эффект или эффект Штарка в поле световой волны (одетый атом) (продолжение).

Рассуждения проведены для случая $\Omega < 0$, когда получаем $u_0 > 0$ и $v_0 > 0$. Если $\Omega > 0$, то $u_0 < 0$, но $v_0 > 0$.

Чтобы знать амплитуды трех компонент нужно найти величины u_0 и v_0 .

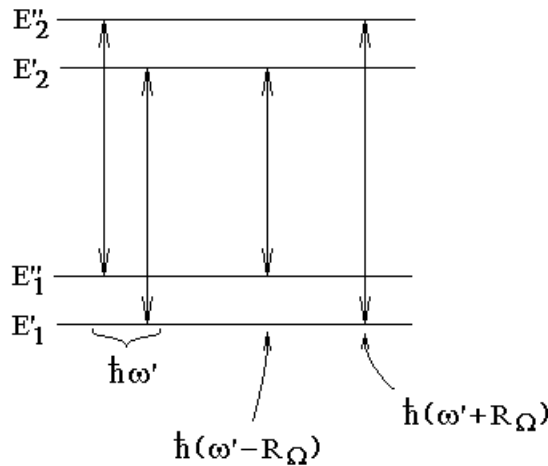


Из рисунка при $\Omega < 0$ видно, что

$$\begin{cases} u = u_0 - u_0 \cdot \cos(R_\Omega t) \\ v = -v_0 \cdot \sin(R_\Omega t) \end{cases}$$

$$P_{V_z} = pN_{0V_z} u_0 \cos(\omega' t) - pN_{0V_z} \frac{u_0 + v_0}{2} \cos((\omega' + R_\Omega)t) + pN_{0V_z} \frac{v_0 - u_0}{2} \cos((\omega' - R_\Omega)t)$$

Для описания трех линий поглощения нужно не менее 4-х уровней энергии. Схема уровней энергии приведена ниже на рисунке.



Чтобы линий поглощения было только три необходимо, чтобы расщепление двух верхних подуровней энергии было бы равно расщеплению двух нижних подуровней.

Из рисунка видно, что энергии уровней связаны с частотами переходов следующими соотношениями:

$$\begin{cases} E_2'' - E_1'' = \hbar\omega' \\ E_2' - E_1'' = \hbar(\omega' - R_\Omega) \\ E_2'' - E_1' = \hbar(\omega' + R_\Omega) \end{cases}$$

Уравнение для четвертого возможного перехода не является линейно независимым по отношению к трем предыдущим уравнениям.

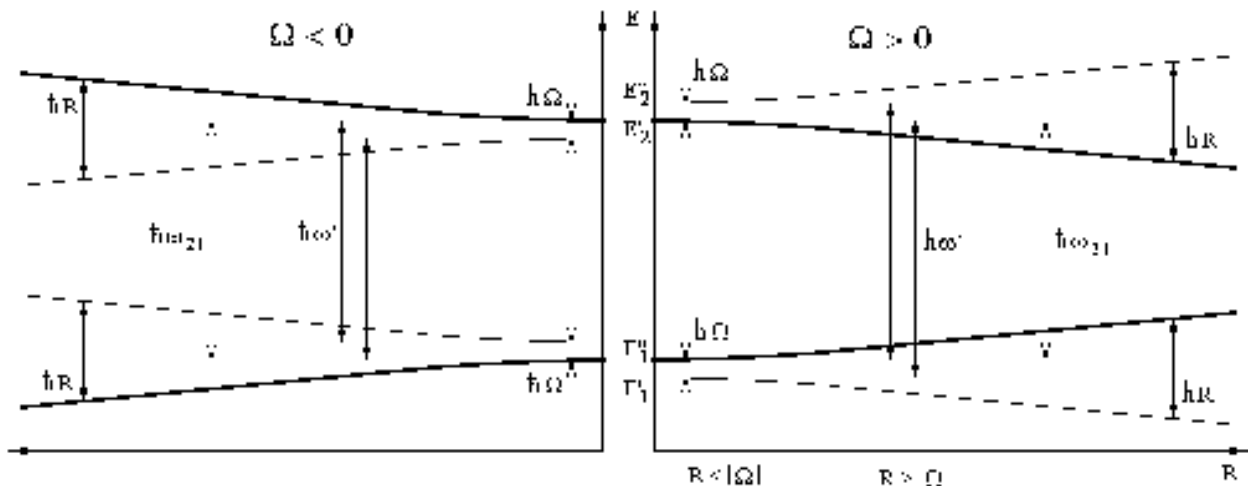
В качестве четвертого уравнения для 4-х неизвестных энергий потребуем из симметрии задачи сохранения центра тяжести 4-х уровней энергии:

$$\frac{E_1' + E_1'' + E_2' + E_2''}{4} = \frac{E_1 + E_2}{2}.$$

Решаем систему из 4-х уравнений и получаем энергии уровней:

$$\begin{cases} E_1' = E_1 - \frac{\hbar\Omega}{2} - \frac{\hbar R_\Omega}{2} \\ E_1'' = E_1 - \frac{\hbar\Omega}{2} + \frac{\hbar R_\Omega}{2} \\ E_2' = E_2 + \frac{\hbar\Omega}{2} - \frac{\hbar R_\Omega}{2} \\ E_2'' = E_2 + \frac{\hbar\Omega}{2} + \frac{\hbar R_\Omega}{2} \end{cases}, \text{ где } \begin{cases} \Omega = \omega - kV_z - \omega_{21} = \omega' - \omega_{21} \\ R_\Omega = \sqrt{R^2 + \Omega^2} \\ R = \frac{p\mathcal{E}_0}{\hbar} \end{cases}.$$

Поведение уровней энергии в зависимости от частоты Раби R , которая пропорциональна амплитуде светового поля \mathcal{E}_0 , приведено на нижеследующем рисунке.



Левая половина рисунка относится к случаю отрицательной расстройки частоты света относительно частоты перехода $\Omega < 0$, а правая часть рисунка — к случаю положительной расстройки $\Omega > 0$.

Рассмотрим подробнее правую часть рисунка, где $\Omega = \omega' - \omega_{21} > 0$.

Левая область графиков правой половины рисунка $R < |\Omega|$ — это область слабого поля или нерезонансная область.

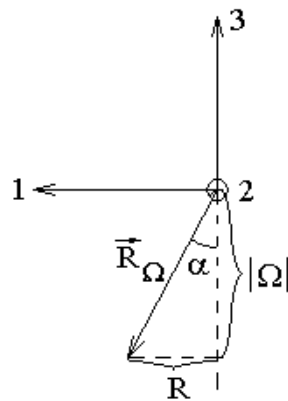
Правая область графиков $R > |\Omega|$ правой половины рисунка — это область сильного поля или резонансная область.

Заметим, что исходные уровни энергии E_1'' и E_2' в случае $\Omega > 0$ приближаются друг к другу при увеличении светового поля. Если же $\Omega < 0$, то исходными уровнями будут уровни E_1' и E_2'' , и они будут удаляться друг от друга с увеличением поля световой волны. То есть концы вертикальной стрелки энергии светового поля отталкивают от себя уровни энергии перехода. Если вертикальная стрелка светового поля длиннее перехода между уровнями, то уровни сближаются, если короче — разбегаются.

Обсудим теперь правила отбора.

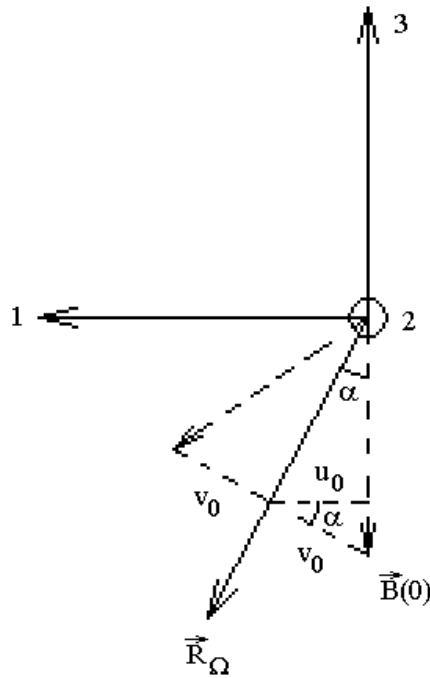
Обозначим угловой радиус при вершине конуса за α , тогда $tg(\alpha) = \left| \frac{R}{\Omega} \right|$,

как это видно из нижеследующего рисунка.



Радиус в основании конуса равен

$$v_0 = B(0) \cdot \sin(\alpha) = \sin(\alpha) = tg(\alpha) \cdot \cos(\alpha) = \frac{tg(\alpha)}{\sqrt{1+tg^2(\alpha)}} = \frac{\frac{R}{|\Omega|}}{\sqrt{1+\frac{R^2}{\Omega^2}}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \Omega^2}},$$



где $u_0 = v_0 \cos(\alpha)$, что видно из рисунка.

$$\text{Тогда } u_0 = v_0 \cos(\alpha) = v_0 \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha)}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \Omega^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{\Omega^2}}} = -\frac{R\Omega}{R^2 + \Omega^2}.$$

Здесь минус появляется, так как на рисунке $\Omega < 0$, а величина $u_0 > 0$.
 Формулы справедливы и при условии $\Omega > 0$. В дальнейшем удобнее будет считать, что $\Omega > 0$.

Напомним, что поляризация содержит колебания на трех частотах:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{V_z} = pN_{0_{V_z}} u_0 \cos(\omega' t) - pN_{0_{V_z}} \frac{u_0 + v_0}{2} \cos((\omega' + R_\Omega)t) + pN_{0_{V_z}} \frac{v_0 - u_0}{2} \cos((\omega' - R_\Omega)t) \\ u_0 = -\frac{R\Omega}{R^2 + \Omega^2} \\ v_0 = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \Omega^2}} \end{array} \right.$$

Тогда амплитуды на частотах $\left\{ \begin{array}{l} \omega' \\ \omega' + R_\Omega \\ \omega' - R_\Omega \end{array} \right.$ пропорциональны величинам

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 \\ \frac{u_0 + v_0}{2} \\ \frac{v_0 - u_0}{2} \end{array} \right. \text{ или пропорциональны } \left\{ \begin{array}{l} -\frac{R\Omega}{R^2 + \Omega^2} \\ \frac{1}{2} \frac{R\Omega}{R^2 + \Omega^2} - \frac{1}{2} \frac{R}{\sqrt{R^2 + \Omega^2}} \\ \frac{1}{2} \frac{R\Omega}{R^2 + \Omega^2} + \frac{1}{2} \frac{R}{\sqrt{R^2 + \Omega^2}} \end{array} \right.$$

Чтобы было удобнее проводить анализ формул, введем безразмерную амплитуду светового поля $\xi \equiv \frac{R}{\Omega}$ или частоту Раби, отнесенную к частотной расстройке светового поля $\Omega = \omega' - \omega_{21}$, и для определенности будем считать, что $\Omega > 0$. Тогда амплитуды поляризации на трех частотах пропорциональны величинам:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\xi}{1 + \xi^2} \\ \frac{1}{2} \frac{\xi}{1 + \xi^2} - \frac{1}{2} \frac{|\xi|}{\sqrt{1 + \xi^2}} \\ \frac{1}{2} \frac{\xi}{1 + \xi^2} + \frac{1}{2} \frac{|\xi|}{\sqrt{1 + \xi^2}} \end{array} \right.$$

Чтобы избавиться от модулей перейдем к рассмотрению трех частот другом в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega' \\ \omega' + \Omega \sqrt{1 + \frac{R^2}{\Omega^2}} \\ \omega' - \Omega \sqrt{1 + \frac{R^2}{\Omega^2}} \end{array} \right. \text{ с амплитудами поляризации } \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\xi}{1 + \xi^2} \\ \frac{1}{2} \frac{\xi}{1 + \xi^2} - \frac{1}{2} \frac{\xi}{\sqrt{1 + \xi^2}} \\ \frac{1}{2} \frac{\xi}{1 + \xi^2} + \frac{1}{2} \frac{\xi}{\sqrt{1 + \xi^2}} \end{array} \right. \text{ на этих}$$

частотах.

Рассмотрим, что происходит в слабом световом поле при $\xi \rightarrow 0$.

В этом случае все три амплитуды стремятся к нулю. Разделим все три амплитуды на безразмерную амплитуду поля ξ и получим коэффициенты пропорциональные амплитудам колебаний поляризации, но такие, что некоторые коэффициенты при этом не будут стремиться к нулю при $\xi \rightarrow 0$.

$$\text{Коэффициенты будут равны } \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{1 + \xi^2} \\ \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \xi^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}} \\ \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \xi^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}} \end{array} \right. \xrightarrow{\xi \rightarrow 0} \left\{ \begin{array}{l} -1 \\ 0 \\ +1 \end{array} \right. .$$

То есть правила отбора оставляют разрешенными только две крайние частоты.

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega' \\ \omega' + \Omega \sqrt{1 + \frac{R^2}{\Omega^2}} \approx \omega' + \Omega \\ \omega' - \Omega \sqrt{1 + \frac{R^2}{\Omega^2}} \approx \omega' - \Omega \approx \omega_{21} \end{array} \right.$$

при $\xi \rightarrow 0$. Разрешенные частоты ω' и ω_{21} , где $\omega' = \omega_{21} + \Omega$.

В относительно слабом световом поле для второй пробной световой волны разрешены переходы на частоте первого светового поля ω' и на частоте перехода ω_{21} . Переходы на частоте ω' удобнее рассматривать, не как переходы между новыми уровнями энергии, а как нелинейность взаимодействия со средой одного светового поля на частоте ω' вместо двух световых полей.

То есть в относительно слабом световом поле можно считать, что новых уровней энергии не возникает, а старые уровни сдвигаются, как бы отталкиваясь от вертикальной стрелки с длиной равной энергии кванта света.

Рассмотрим теперь, правила отбора в сильном световом поле при $\xi \rightarrow \infty$.

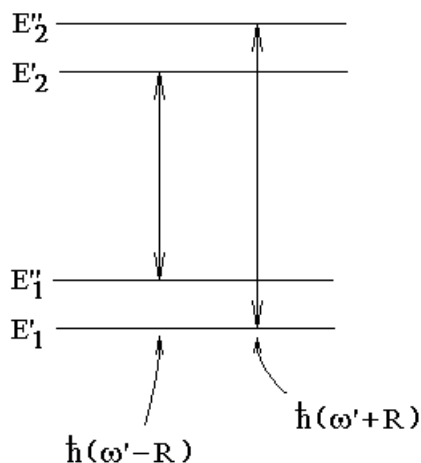
В этом случае нет необходимости делить амплитуды на ξ , так как некоторые из них и так стремятся к ненулевой константе.

$$\text{Амплитуды на частотах } \begin{cases} \omega' + R_{\Omega} \\ \omega' - R_{\Omega} \end{cases} \text{ стремятся к величинам } \begin{cases} -\frac{1}{2} \\ +\frac{1}{2} \end{cases}, \text{ амплитуда}$$

на частоте ω' стремится к нулю.

В сильном световом поле $R_{\Omega} \approx R$.

В сильном световом поле для пробной световой волны разрешены переходы с частотами $\omega' + R$ и $\omega' - R$, где ω' — частота первого светового поля. Разрешенные в сильном световом поле переходы указаны на следующем рисунке:



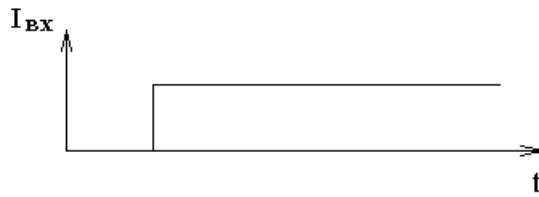
Оптические нутации.

Рассмотрим оптическую схему:



Рассмотрим интенсивность света на выходе кюветы при быстром включении светового поля на входе в кювету.

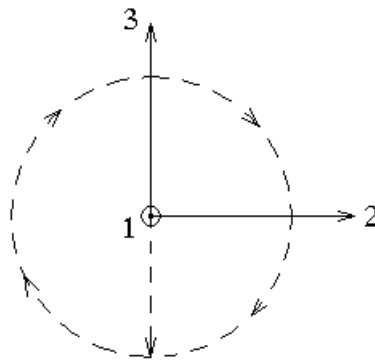
Пусть зависимость интенсивности света на входе в кювету имеет следующий вид:



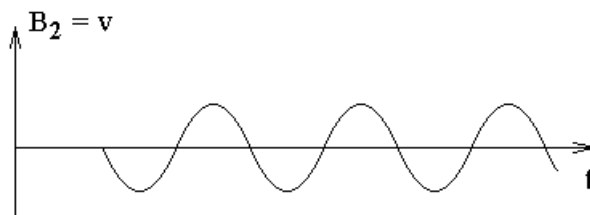
Как при этом выглядит зависимость интенсивности на выходе из кюветы, как функция времени?

Рассмотрим сначала частный случай без затухания и накачки и с нулевой расстройкой частоты светового поля относительно частоты перехода $\Omega = 0$.

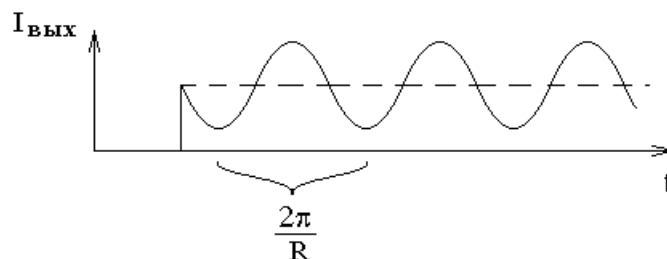
Вектор Блоха вращается вокруг вектора $\vec{R}_\Omega = \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:



Такому вращению соответствует следующая зависимость второй координаты вектора Блоха от времени:

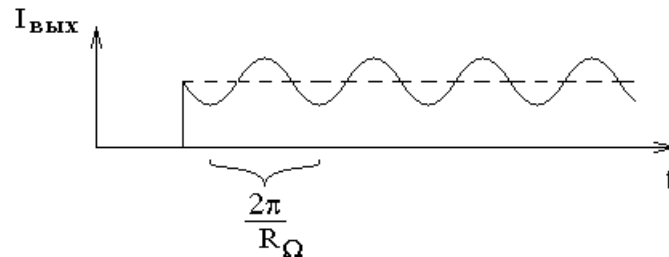


Эта координата отвечает за усиление света средой. Соответственно зависимость интенсивности на выходе из кюветы, как функция времени примет следующий вид:



Угловая скорость вращения вектора Блоха и циклическая частота колебаний усиления среды равна R . Тогда период колебаний интенсивности света на выходе из кюветы равен $\frac{2\pi}{R}$.

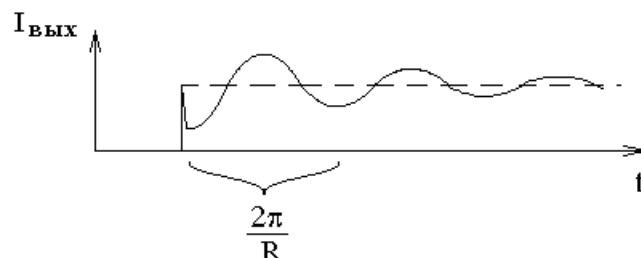
В случае ненулевой расстройки частоты света относительно частоты перехода $\Omega \neq 0$, как это уже обсуждалось ранее, амплитуда колебаний усиления среды становится меньше, а частота $R_\Omega = \sqrt{R^2 + \Omega^2}$ — больше. Тогда зависимость интенсивности света на выходе из кюветы примет следующий вид:



В случае доплеровского уширения спектральной линии $kU \gg \Gamma$ расстройка $\Omega = \omega - kV_z - \omega_{21}$ зависит от лучевой скорости молекул V_z . Синусоиды зависимости усиления света от времени при различных расстройках Ω имеют разную частоту R_Ω и поэтому быстро расходятся по фазам. Усиление света всей средой представляет собой сумму синусоид с весовыми множителями равными распределению молекул по лучевой скорости. Сумма синусоид — гармоническая функция, затухающая во времени в результате расфазировки отдельных синусоид.

В зависимости от соотношения доплеровской ширины спектральной линии $2kU$ и частоты Раби R время расфазировки τ синусоид усиления различается. Время расфазировки $\tau = \frac{1}{R}$ при условии $R \ll kU$, и $\tau = \frac{1}{kU}$ при условии $kU \ll R$.

Зависимость интенсивности света на выходе из кюветы от времени в случае $R \ll kU$ имеет следующий вид:



Название эффекта — оптические нутации связано с аналогией с нутациями гироскопа. Ассоциация вызвана тем, что первоначально определение первых двух компонент u и v вектора Блоха несколько отличалось. Определением было равенство $2\rho_{21} = u - iv$ вместо более позднего

определения $2\tilde{\rho}_{21} = u - iv$. Величины ρ_{21} и $\tilde{\rho}_{21}$ связаны соотношением $\rho_{21} = \tilde{\rho}_{21}e^{-i\omega't}$. Тогда при первоначальном определении вектора Блоха кроме рассмотренного нами вращения вектора Блоха $(-\vec{R}_\Omega)$ происходит быстрое его вращение вокруг оси 3 с частотой ω' .

Тогда вращение $(-\vec{R}_\Omega)$ выглядит, как медленные колебания на фоне быстрого вращения ω' вокруг вертикальной оси. Эти медленные колебания похожи на нутации гироскопа. Отсюда и название явления.

Количественное описание оптических нутаций.

Чтобы найти зависимость интенсивности света на выходе кюветы, как функцию времени, нужно сначала найти усиление среды, которое пропорционально второй компоненте вектора Блоха. Чтобы найти вторую компоненту решим уравнения для вектора Блоха:

$$\dot{\vec{B}} + \gamma\vec{B} = [\vec{B}, \vec{R}_\Omega] + \vec{W}^0.$$

Здесь $\vec{R}_\Omega = \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix}$ — вектор, вокруг которого в левую сторону вращается

вектор Блоха; $\vec{W}^0 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma w^0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma_2 \rho_{22}^0 - \gamma_1 \rho_{11}^0 \end{pmatrix}$ — накачка ($\gamma_1 = \gamma_2$);

$\Omega = \omega - kV_z - \omega_{21}$ — расстройка частоты светового поля в системе отсчета молекулы относительно частоты перехода, $R = \frac{p\varepsilon_0}{\hbar}$ — частота Раби, ε_0 — амплитуда светового поля, $p = \int \psi_1^*(\vec{p}, \vec{e})\psi_2 d\vec{r}$ — недиагональный матричный элемент проекции дипольного момента перехода на единичный вектор поляризации световой волны.

До включения светового поля решение уравнения для вектора Блоха имеет вид:

$$\vec{B}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho_{22}^0 - \rho_{11}^0 \end{pmatrix}.$$

После включения светового поля в соответствии с рассмотренными ранее возможными решениями уравнений Блоха ищем решение в виде:

$\vec{B}(t) = \vec{B}_{cma\psi} + \vec{A}(t) \cdot e^{-\gamma t}$, где вектор $\vec{B}_{cma\psi}$ — решение уравнения

$\gamma\vec{B}_{cma\psi} = [\vec{B}_{cma\psi}, \vec{R}_\Omega] + \vec{W}^0$, вектор $\vec{A}(t)$ — решение уравнения $\dot{\vec{A}} = [\vec{A}, \vec{R}_\Omega]$, вектор $\vec{A}(t)$ вращается вокруг вектора \vec{R}_Ω в левую сторону.

Сначала решим систему из трех уравнений с тремя неизвестными:

$\gamma \vec{B}_{стац} = [\vec{B}_{стац}, \vec{R}_\Omega] + \vec{W}^0$ и получим

$$\begin{cases} u_{стац} = \frac{R\Omega w^0}{\gamma^2 + R^2 + \Omega^2} \\ v_{стац} = \frac{\gamma R w^0}{\gamma^2 + R^2 + \Omega^2} \\ w_{стац} = \frac{(\gamma^2 + \Omega^2) w^0}{\gamma^2 + R^2 + \Omega^2} \end{cases}.$$

Теперь решим дифференциальное уравнение $\dot{\vec{A}} = [\vec{A}, \vec{R}_\Omega]$ с начальным условием для нулевого момента времени в виде:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{стац} \\ v_{стац} \\ w_{стац} \end{pmatrix} + \vec{A}(0) \cdot e^{-\gamma t} \quad \Rightarrow$$

$$\vec{A}(0) = \begin{pmatrix} -\frac{R\Omega w^0}{\gamma^2 + R^2 + \Omega^2} \\ -\frac{\gamma R w^0}{\gamma^2 + R^2 + \Omega^2} \\ \frac{R^2 w^0}{\gamma^2 + R^2 + \Omega^2} \end{pmatrix}.$$

Система уравнений $\dot{\vec{A}} = [\vec{A}, \vec{R}_\Omega]$ или
$$\begin{cases} \dot{A}_1 = A_2 \Omega \\ \dot{A}_2 = A_3 R - A_1 \Omega \\ \dot{A}_3 = -A_2 R \end{cases}$$
 решается

стандартным образом. Одна из переменных выражается через остальные и подставляется в оставшиеся уравнения. В результате для каждой координаты получается уравнение гармонических колебаний с частотой R_Ω , что вполне естественно, так как вектор \vec{A} вращается с угловой скоростью $-\vec{R}_\Omega$.

Для каждой переменной получаем решение в виде:

$A_i = a_i \cos(R_\Omega t) + b_i \sin(R_\Omega t)$, где a_i и b_i — произвольные константы интегрирования, которые находятся из начальных условий и самих уравнений.

Произвольные константы интегрирования a_i можно найти из условия

$$\vec{A}(0) = \begin{pmatrix} -\frac{R\Omega w^0}{\gamma^2 + R^2 + \Omega^2} \\ -\frac{\gamma R w^0}{\gamma^2 + R^2 + \Omega^2} \\ \frac{R^2 w^0}{\gamma^2 + R^2 + \Omega^2} \end{pmatrix},$$

а константы b_i из величины $\dot{\vec{A}}(0)$, которую можно найти, подставив $\vec{A}(0)$ в правую часть равенства

$$\begin{cases} \dot{A}_1 = A_2 \Omega \\ \dot{A}_2 = A_3 R - A_1 \Omega \\ \dot{A}_3 = -A_2 R \end{cases}$$

В результате получим:

$$\vec{A} = \frac{R w^0}{\gamma^2 + R^2 + \Omega^2} \begin{pmatrix} -\Omega \cdot \cos(R_\Omega t) - \frac{\Omega \gamma}{R_\Omega} \cdot \sin(R_\Omega t) \\ -\gamma \cdot \cos(R_\Omega t) + R_\Omega \cdot \sin(R_\Omega t) \\ R \cdot \cos(R_\Omega t) + \frac{R \gamma}{R_\Omega} \cdot \sin(R_\Omega t) \end{pmatrix}, \quad \text{где } w^0 = \rho_{22}^0 - \rho_{11}^0.$$

Нас интересует только усиление среды, которое связано со второй компонентой вектора Блоха $B_2 = v_{\text{стац}} + A_2(t) \cdot e^{-\gamma t}$.

Тогда

$$B_2 = \frac{R w^0}{\gamma^2 + R^2 + \Omega^2} \left(\gamma - \gamma \cdot \cos(R_\Omega t) \cdot e^{-\gamma t} + R_\Omega \cdot \sin(R_\Omega t) \cdot e^{-\gamma t} \right).$$

Как было получено при рассмотрении физического смысла компонент вектора Блоха:

$$\aleph = -\frac{4\pi\omega}{n_0 c} \cdot p \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B_2(V_z)}{\epsilon_0} N_{0V_z} dV_z.$$

Подставим сюда B_2 и $R = \frac{p\epsilon_0}{\hbar}$ и получим:

$$\aleph = -\frac{4\pi\omega p^2}{n_0 c \hbar R} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} B_2(V_z) \cdot N_{0V_z} dV_z.$$

При условиях $\begin{cases} \gamma \ll kU \\ R \ll kU \end{cases}$ интеграл можно взять. Под интегралом три

слагаемых. В первом слагаемом лоренцевский контур можно рассматривать, как дельта-функцию Дирака. Интеграл от второго слагаемого гораздо меньше интеграла от третьего слагаемого и это второе слагаемое можно отбросить. Интеграл от третьего слагаемого выражается через функцию Бесселя. В результате:

$$\aleph = \frac{4\pi\sqrt{\pi}\omega p^2 N_0}{n_0 c \hbar kU} \cdot e^{-\left(\frac{\omega - \omega_{21}}{kU}\right)t} \cdot \left(\frac{\gamma(\rho_{22}^0 - \rho_{11}^0)}{\sqrt{\gamma^2 + R^2}} + e^{-\gamma t} \cdot J_0(Rt) \right).$$

Здесь слагаемое независящее от времени — это стационарное насыщенное светом поглощение, слагаемое пропорциональное $e^{-\gamma t}$ — это нестационарное поглощение, J_0 — функция Бесселя с нулевым значком.

Напомним, что одно из определений функции Бесселя имеет вид:

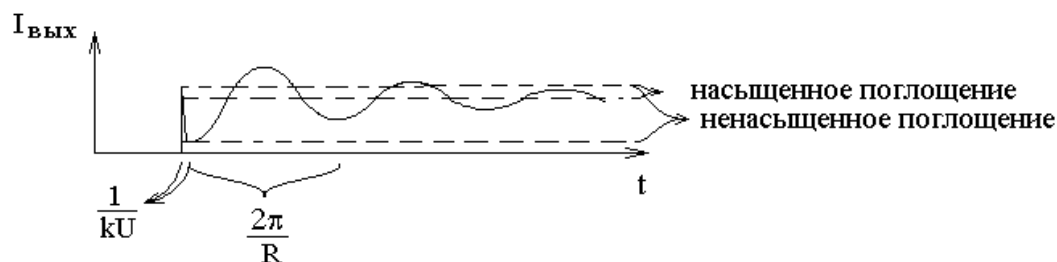
$$J_m(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(mt - z \cdot \sin(t)) \cdot dt.$$

Интенсивность на выходе кюветы для оптически тонкого слоя среды толщиной L :

$$I_{\text{вых}} = I_{\text{вх}}(1 - \aleph L).$$

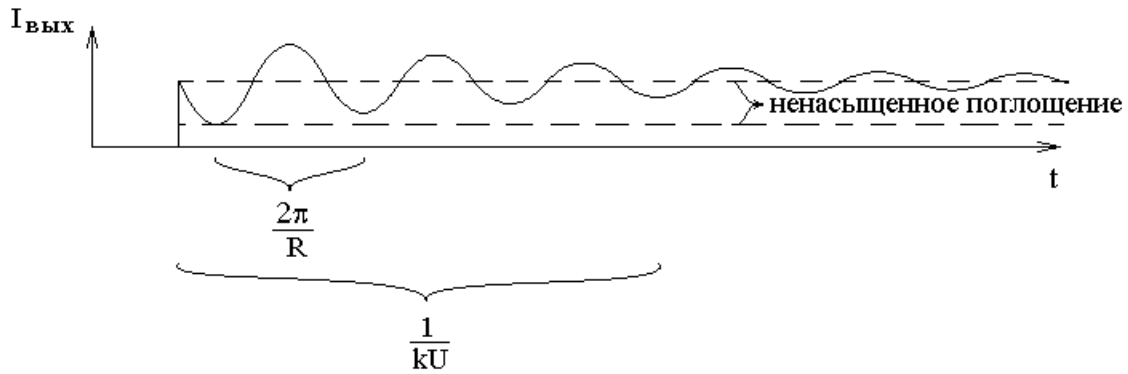
Как уже говорилось выше, вид зависимости интенсивности света на выходе из кюветы от времени различается при условии $R \ll kU$ и при условии $kU \ll R$.

В случае относительно слабого поля $\gamma \ll R \ll kU$:



Быстрый спад интенсивности за первый промежуток времени $\frac{1}{kU}$ полученная нами выше формула не описывает, так как она была получена при предположении, что доплеровская ширина линии kU велика $kU \gg R$.

В случае сильного светового поля $R \gg kU$:

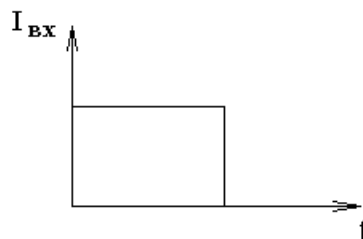


Затухание свободной поляризации (ЗСП). Сверхизлучение.

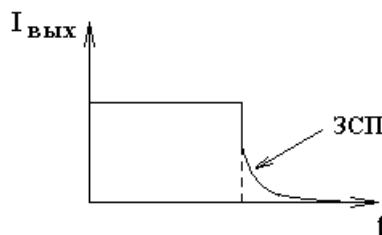
Оптическая схема опыта для наблюдения сигнала затухания свободной поляризации обычна для нестационарной лазерной спектроскопии:



На входе в кювету свет резко выключают.



Как показывает опыт, зависимость интенсивности света на выходе кюветы от времени имеет следующий вид:



Сигнал ЗСП — это послесвечение диполей, раскачанных световым полем.

Особенность сигнала состоит в том, что он спадает гораздо быстрее, чем затухает излучение каждого диполя: $I \sim e^{-\gamma t}$.

Причина быстрого спада в том, что сначала диполи молекул излучают синфазно, и их излучения складываются по амплитуде, а затем происходит расфазировка диполей. При полной расфазировке излучение диполей складывается по интенсивности.

Если складываются амплитуды, то амплитуда суммарной волны в N раз больше, чем амплитуда излучения одной молекулы, здесь N — общее число

молекул. Интенсивность света суммарной волны пропорциональна квадрату амплитуды и, следовательно, пропорциональна N^2 .

Если излучение разных молекул складывается по интенсивности, то суммарная интенсивность в N раз больше интенсивности излучения одной молекулы.

Следовательно, при расфазировке диполей интенсивность света уменьшается примерно в N раз за время расфазировки, которое может быть гораздо меньше времени $\frac{1}{\gamma}$, за которое затухает, как $e^{-\gamma t}$, излучение одной молекулы.

Обсудим подробнее механизм и время расфазировки.

Колебания диполя похожи на колебания механического маятника. Пока есть вынуждающая сила со стороны светового поля, вынужденные колебания диполя происходят на частоте светового поля. Как только световое поле выключают, колебания продолжают с той же фазы, но уже на собственной частоте колебаний диполя, на частоте перехода ω_{21} .

В системе отсчета диполя каждый диполь после выключения поля совершает колебания и излучает на частоте перехода ω_{21} , но в лабораторной системе отсчета частоты излучений диполей оказываются различными из-за различных доплеровских сдвигов kV_z .

Частота излучения диполя в лабораторной системе отсчета равна $\omega_{21} + kV_z$, где V_z — проекция скорости диполя на направление излучения диполя.

Время затухания сигнала ЗСП — это время расфазировки диполей. Время расфазировки зависит от разности частот излучения разных диполей, то есть от ширины спектра излучения $\Delta\omega$.

Тогда время затухания ЗСП равно $\Delta t \approx \frac{1}{\Delta\omega}$.

Величина $\Delta\omega$ определяется возможными значениями kV_z . Ситуация различается в двух случаях. Если частота Раби меньше доплеровской ширины спектральной линии $R < kU$, то резонансно со светом взаимодействуют молекулы, для которых расстройка $\Omega = \omega - kV_z - \omega_{21}$ меньше частоты Раби

$|\Omega| < R$. Тогда $\Delta\omega \approx \Delta(kV_z) \approx R$ и $\Delta t \approx \frac{1}{R}$ — ожидаемое время затухания ЗСП.

Если частота Раби больше доплеровской ширины $R > kU$, то $\Delta\omega \approx kU$ и $\Delta t \approx \frac{1}{kU}$.

Что происходит с энергией запасенной диполями? Пропадает ли эта энергия за время $\frac{1}{R}$ (в случае $R < kU$) или за время $\frac{1}{\gamma}$?

Оказывается, что энергия пропадает медленно. Тогда куда же она пропадает?

Дело в том, что синфазно излучение диполей только в первый момент и только вперед по ходу луча. Расфазировка диполей приводит к перераспределению излучения диполей по всем направлениям без изменения мощности излучения каждого диполя по всем направлениям и без изменения мощности излучения всей среды.

Сверхизлучение.

Сверхизлучение — это не ЗСП, а скорее наоборот.

ЗСП — это ускоренное падение интенсивности на приемнике без изменения скорости распада возбуждения $\rho_{22} \sim e^{-\gamma_2 t}$. Сверхизлучение — ускоренное падение интенсивности за счет ускоренного распада возбуждения, когда ρ_{22} спадает быстрее, чем $e^{-\gamma_2 t}$.

Сверхизлучение — это синфазное излучение диполей во всех направлениях, и ускоренная потеря энергии диполей.

При сверхизлучении интенсивность света пропорциональна квадрату концентрации $I \sim N_0^2$, а при обычном излучении пропорциональна первой степени концентрации $I \sim N_0$.

Рассмотрим диполи молекул, расположенные в малом объеме $V < \left(\frac{\lambda}{2}\right)^3$.

Пусть молекулы неподвижны, а их диполи осциллируют во внешнем световом поле. После выключения света диполи осциллируют синфазно и синфазно излучают во всех направлениях, так как разность хода для излучения диполей в любом направлении меньше $\frac{\lambda}{2}$. При этом их излучения складываются по амплитуде. Амплитуда суммарной волны в N раз больше амплитуды излучения одного диполя, а интенсивность в N^2 раз больше.

Такое сверхизлучение проявляется и в случае вынужденного светом и в случае спонтанного излучения молекул, предварительно заброшенных на верхний уровень энергии. В случае спонтанного излучения появляющиеся осциллирующие диполи вынуждают спонтанный распад друг друга.

Заметим, что уравнения для матрицы плотности с феноменологическим затуханием не содержат сверхизлучения, так как феноменологически распад пропорционален $e^{-\gamma_2 t}$ по определению.

Количественное описание ЗСП — затухания свободной поляризации.

Сигнал ЗСП можно рассчитать согласно следующей логической цепочке:

$$\vec{B}_{\text{стац}}(V_z) \rightarrow \vec{B}_{\text{зам}}(V_z, t) \rightarrow \vec{P}_{V_z}(t) \rightarrow \vec{E}_{\text{вых}}(t) \rightarrow \mathcal{E}_{0_{\text{вых}}}(t).$$

Сначала найдем стационарное значение вектора Блоха $\vec{B}_{\text{стац}}$ перед выключением светового поля. Это стационарное значение является решением уравнения для вектора Блоха с нулевой производной по времени:

$$\gamma \vec{B}_{\text{стац}} = [\vec{B}_{\text{стац}}, \vec{R}_{\Omega}] + \vec{W}^0.$$

Решение этих трех линейных уравнений с тремя неизвестными координатами вектора Блоха имеет следующий вид:

$$\begin{cases} u_{\text{стац}} = \frac{R\Omega w^0}{\gamma^2 + R^2 + \Omega^2} \\ v_{\text{стац}} = \frac{\gamma R w^0}{\gamma^2 + R^2 + \Omega^2}, \text{ где } w^0 = \rho_{22}^0 - \rho_{11}^0. \\ w_{\text{стац}} = \frac{(\gamma^2 + \Omega^2) w^0}{\gamma^2 + R^2 + \Omega^2} \end{cases}$$

После выключения светового поля вектор Блоха затухает к новому

стационарному значению $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho_{22}^0 - \rho_{11}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w^0 \end{pmatrix}$. Как обсуждалось ранее в вопросе

о решениях уравнения для вектора Блоха, затухающее решение представляет собой вектор, вращающийся с угловой скоростью $-\vec{R}_\Omega$. Длина вектора затухающего решения экспоненциально убывает во времени, как $e^{-\gamma t}$.

Величину затухающего решения в нулевой момент времени выключения светового поля можно найти из начальных условий:

$$\vec{B}_{\text{стац}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho_{22}^0 - \rho_{11}^0 \end{pmatrix} + \vec{B}_{\text{зам}}(0).$$

Откуда

$$\vec{B}_{\text{зам}}(0) = \begin{pmatrix} \frac{R\Omega w^0}{\gamma^2 + R^2 + \Omega^2} \\ \frac{\gamma R w^0}{\gamma^2 + R^2 + \Omega^2} \\ -\frac{R^2 w^0}{\gamma^2 + R^2 + \Omega^2} \end{pmatrix}.$$

Здесь $R = \frac{p\mathcal{E}_0}{\hbar}$ — частота Раби для светового поля перед его выключением.

Затухающее решение вращается вокруг вертикально оси, вокруг вектора:

$$-\vec{R}_\Omega = -\begin{pmatrix} R \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix},$$

так как после выключения светового поля частота Раби равна нулю $R = 0$.

Нас будут интересовать только две первых компоненты u и v вектора Блоха, так как только от них зависит поляризация среды, и только от них зависит сигнал затухания свободной поляризации.

Вращение с частотой $(-\Omega)$ затухающей, как $e^{-\gamma t}$, составляющей вектора Блоха в горизонтальной плоскости \vec{B}_\perp означает, что первые две компоненты вектора Блоха подчиняются следующим уравнениям:

$$\begin{cases} u_{зам} = e^{-\gamma t} B_\perp \cos(\beta - \Omega t) \\ v_{зам} = e^{-\gamma t} B_\perp \sin(\beta - \Omega t) \end{cases}$$

Сравнивая эти уравнения и значения первых двух проекций затухающей составляющей вектора Блоха в нулевой момент времени $\vec{B}_{зам}(0)$, можно найти константы B_\perp и β .

В результате получаем:

$$\begin{cases} u_{зам} = \frac{Rw^0}{\gamma^2 + R^2 + \Omega^2} \cdot e^{-\gamma t} (\Omega \cdot \cos(\Omega t) + \gamma \cdot \sin(\Omega t)) \\ v_{зам} = \frac{Rw^0}{\gamma^2 + R^2 + \Omega^2} \cdot e^{-\gamma t} (\gamma \cdot \cos(\Omega t) - \Omega \cdot \sin(\Omega t)) \end{cases}, \text{ где } \begin{cases} \Omega = \omega - kV_z - \omega_{21} \\ w^0 = \rho_{22}^0 - \rho_{11}^0 \end{cases}$$

Распределение поляризации среды по проекции скорости молекул на луч выражается через две первые компоненты вектора Блоха:

$$P_{V_z} = p N_{0V_z} (u(V_z) \cdot \cos(\varphi) - v(V_z) \cdot \sin(\varphi)) = \text{Re} \left(p N_{0V_z} (u(V_z) - iv(V_z)) e^{-i\varphi} \right)$$

Откуда комплексная амплитуда поляризации среды выражается через первые две компоненты вектора Блоха:

$$\tilde{P}_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} p N_{0V_z} \cdot (u_{зам}(V_z) - iv_{зам}(V_z)) \cdot dV_z$$

Далее, амплитуду светового поля на выходе кюветы можно найти с помощью укороченного волнового уравнения:

$$\frac{d\tilde{E}_0}{dz} = 2\pi i \frac{\omega}{n_0 c} \tilde{P}_0$$

Будем считать, что длина кюветы Δz мала. Тогда производная от амплитуды света по координате почти постоянна вдоль луча, и

$$\Delta \tilde{E}_0 = 2\pi i \frac{\omega}{n_0 c} \tilde{P}_0 \cdot \Delta z$$

Света на входе в кювету больше нет, поэтому

$$\tilde{E}_{0_{вых}} = \Delta \tilde{E}_0 = 2\pi i \frac{\omega}{n_0 c} \tilde{P}_0 \cdot \Delta z$$

Попытаемся найти амплитуду светового поля на выходе кюветы при условии $R \ll kU$.

Функция $u_{зам} = \frac{Rw^0}{\gamma^2 + R^2 + \Omega^2} \cdot e^{-\gamma t} (\Omega \cdot \cos(\Omega t) + \gamma \cdot \sin(\Omega t))$ — узкая в зависимости от Ω по сравнению с kU и нечетная функция от Ω , поэтому интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} N_{0V_z} \cdot p \cdot u_{зам} \cdot dV_z$ очень мал, и им можно пренебречь. Если считать, что $N_{0V_z} = const$, то интеграл просто равен нулю, но N_{0V_z} — медленная (широкая) функция от V_z и от $\Omega = \omega - kV_z - \omega_{21}$, поэтому интеграл очень мал.

Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{0_{вых}} &= 2\pi \frac{\omega p \Delta z}{n_0 c} \int_{-\infty}^{+\infty} N_{0V_z} v_{зам}(V_z) dV_z \quad \Rightarrow \\ \tilde{E}_{0_{вых}} &= 2\sqrt{\pi} \varepsilon_0 \frac{\omega p^2 N_0 (\rho_{22}^0 - \rho_{11}^0) \Delta z}{n_0 c \hbar k U} e^{-\gamma t} e^{-\left(\frac{\omega - \omega_{21}}{kU}\right)^2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Omega \cdot \sin(\Omega t) - \gamma \cdot \cos(\Omega t)}{\gamma^2 + R^2 + \Omega^2} d\Omega \end{aligned}$$

Второе слагаемое под интегралом меньше первого при условии $\gamma \ll R$, тогда

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{0_{вых}} &= 2\sqrt{\pi} \varepsilon_0 \frac{\omega p^2 N_0 (\rho_{22}^0 - \rho_{11}^0) \Delta z}{n_0 c \hbar k U} e^{-\gamma t} e^{-\left(\frac{\omega - \omega_{21}}{kU}\right)^2} \cdot F\left(\sqrt{\gamma^2 + R^2} t\right), \text{ где} \\ F(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t \cdot \sin(t)}{x^2 + t^2} dt. \end{aligned}$$

Интеграл можно найти, как мнимую часть интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t \cdot e^{it}}{x^2 + t^2} dt$. Путь

интегрирования этого интеграла можно замкнуть на комплексной плоскости по полуокружности в верхней части комплексной полуплоскости. Интеграл по замкнутому контуру на комплексной плоскости равен коэффициенту $2\pi i$, умноженному на вычет в точке $t = ix$. В результате интеграл равен $F(x) = \pi \cdot e^{-x}$.

$$F\left(\sqrt{\gamma^2 + R^2} t\right) \approx F(Rt) \text{ при } R \gg \gamma.$$

Тогда

$$\varepsilon_{0_{вых}} = \tilde{E}_{0_{вых}} = -2\pi \sqrt{\pi} \varepsilon_0 \frac{\omega p^2 N_0 (\rho_{11}^0 - \rho_{22}^0) \Delta z}{n_0 c \hbar k U} e^{-(\gamma+R)t} e^{-\left(\frac{\omega - \omega_{21}}{kU}\right)^2}.$$

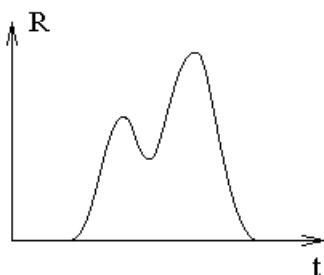
Отметим, что сигнал ЗСП пропорционален $e^{-(\gamma+R)t}$, а оптические нутации пропорциональны $e^{-\gamma t} J_0(Rt)$. Тогда при условии $R \ll kU$ сигнал

ЗСП, как и сигнал оптических нутаций, затухает примерно за один период колебаний с частотой Раби R .

Площадь светового импульса. Самоиндуцированная прозрачность.

Частота Раби R пропорциональна амплитуде света \mathcal{E}_0 , так как $R = \frac{p\mathcal{E}_0}{\hbar}$.

Рассмотрим световой импульс с некоторой зависимостью частоты Раби от времени представленной на нижеследующем рисунке:



Площадью светового импульса называется интеграл:

$$S = \int R(t) dt, \text{ который совпадает с площадью под графиком } R(t).$$

Площадь светового импульса рассматривается только в сильном световом поле, поэтому пусть $R \gg |\Omega|$. Тогда $R_\Omega = \sqrt{R^2 + \Omega^2} \approx R$.

Вектор Блоха вращается вокруг вектора $-\vec{R}_\Omega$ с угловой скоростью R_Ω . Тогда интеграл $\int R_\Omega dt$ равен углу поворота вектора Блоха вокруг вектора $-\vec{R}_\Omega$.

С учетом неравенства $R \gg |\Omega|$ получаем $\vec{R}_\Omega = \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, и площадь светового

импульса $S = \int R(t) dt$ равна углу поворота вектора Блоха вокруг оси 1 в левую сторону за время светового импульса.

Если площадь светового импульса равна $\frac{\pi}{2}$, то такой световой импульс называют $\frac{\pi}{2}$ импульсом. Такой импульс поворачивает вектор Блоха на угол $\frac{\pi}{2}$ вокруг оси 1 в левую сторону. Аналогично π импульс поворачивает вектор Блоха вокруг оси 1 на угол π .

2π импульс поворачивает вектор Блоха на полный оборот и возвращает его в исходное направление, ничего не изменяя в среде. Если в среде ничего не изменяется, значит, среда не поглощает свет.

Если площадь светового импульса меньше, чем 2π , то он заметно поглощается средой. Если площадь импульса больше, чем 2π , но меньше, чем 4π , то импульс поглощается средой до тех пор, пока его площадь не сравняется с 2π . После этого получившийся 2π импульс распространяется в

среде, почти не поглощаясь. Следовательно, мощный свет распадается в среде на 2π импульсы, которые затем проходят среду почти без поглощения.

Такое распространение света в среде называют явлением самоиндуцированной прозрачности.

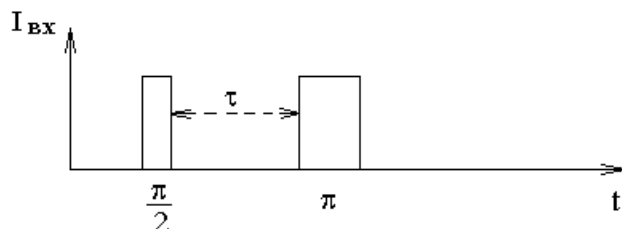
Фотонное эхо.

Двухимпульсное фотонное эхо.

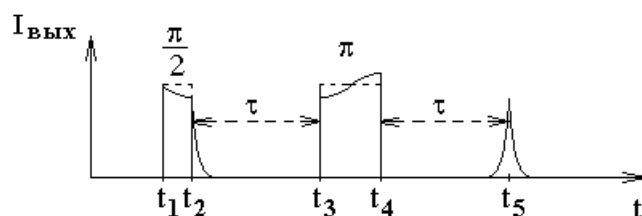
Оптическая схема регистрации фотонного эха — это обычная схема наблюдения нестационарных эффектов нелинейной лазерной спектроскопии:



Пусть на входе в кювету зависимость интенсивности от времени имеет следующий вид:



Экспериментально наблюдается следующая зависимость интенсивности света на выходе кюветы от времени:



После $\frac{\pi}{2}$ и π световых импульсов наблюдается еще один световой импульс, который называют фотонным эхо. Временной интервал между $\frac{\pi}{2}$ и π импульсами равен интервалу между π импульсом и фотонным эхо.

Оказывается, что сигнал фотонного эха можно рассматривать, как два сигнала ЗСП, первый из которых обращен во времени:

$$\text{Эхо} = 2 \text{ЗСП.}$$

Прежде чем объяснить сигнал фотонного эха заметим, что первый $\frac{\pi}{2}$ импульс на выходе кюветы искажен. Вершина импульса искажена оптическими

нутациями. В $\frac{\pi}{2}$ импульсе помещается четверть периода оптических нутаций. На рисунке изображен вариант оптических нутаций при условии $R \gg kU$. Задний фронт $\frac{\pi}{2}$ импульса растянут сигналом ЗСП. Любопытно, что второй импульс (π импульс) не должен иметь сигнала ЗСП при идеальном соблюдении равенства площадей импульсов величинам $\frac{\pi}{2}$ и π .

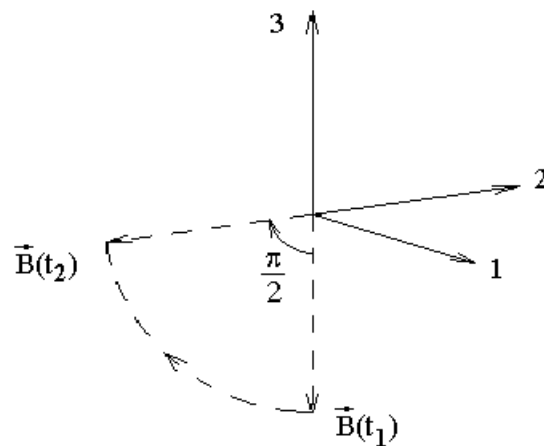
Рассмотрим, что происходит с вектором Блоха в ключевые моменты времени, обозначенные на последнем рисунке, как t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 , и между этими моментами времени.

В начальный момент времени в среде нет поляризации, значит, первые две компоненты вектора Блоха равны нулю.

Обычно вероятность обнаружить молекулу на нижнем уровне энергии больше, чем вероятность обнаружить на верхнем уровне.

Следовательно, в момент времени t_1 вектор Блоха направлен вертикально вниз.

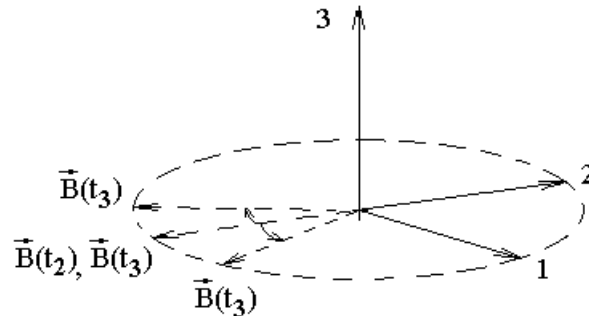
На промежутке времени (t_1, t_2) под действием $\frac{\pi}{2}$ импульса вектор Блоха поворачивается на угол $\frac{\pi}{2}$ вокруг оси 1 в левую сторону:



На промежутке времени (t_2, t_3) светового поля нет, поэтому вектор Блоха вращается в левую сторону вокруг вектора $\vec{R}_\Omega = \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix}$. Для молекул с

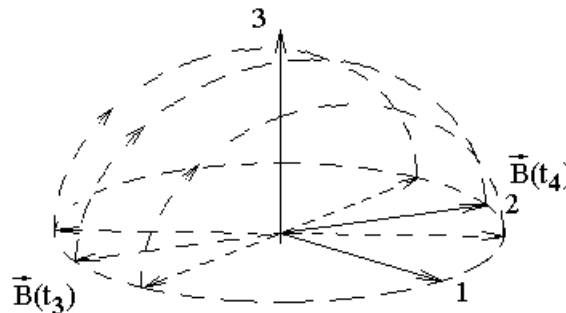
разной лучевой скоростью V_z расстройка $\Omega = \omega - kV_z - \omega_{21}$ принимает различные значения. В результате векторы Блоха для молекул с разными лучевыми скоростями вращаются вокруг вертикальной оси в разных направлениях и с разными угловыми скоростями Ω .

В начале промежутка времени (t_2, t_3) вектор Блоха направлен против оси 2 для всех молекул, как это показано на рисунке приведенном выше. Затем на промежутке (t_2, t_3) векторы Блоха разбегаются в горизонтальной плоскости веером вокруг минус оси 2:



На рисунке в момент времени t_3 изображены только три вектора Блоха из всего веера векторов.

На промежутке времени (t_3, t_4) π импульс света поворачивает веер векторов Блоха вокруг оси 1 в левую сторону на угол π :

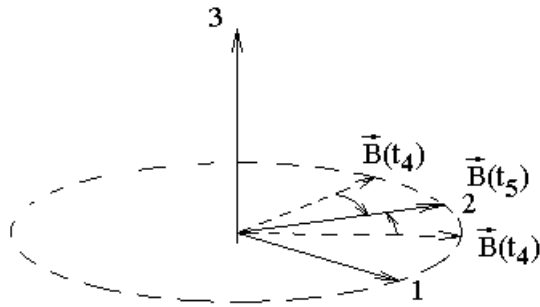


В начале этого промежутка времени веер векторов Блоха направлен против оси 2, в конце промежутка времени веер векторов Блоха направлен вокруг положительного направления оси 2.

На промежутке времени (t_4, t_5) векторы Блоха снова вращаются в левую

сторону вокруг вектора $\vec{R}_\Omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix}$. Для молекул с каждым значением лучевой

скорости V_z вращение вектора Блоха происходит вокруг вертикальной оси в ту же сторону и с той же скоростью, что и на промежутке времени (t_2, t_3) :



Только теперь веер векторов Блоха не разбегается, а наоборот сбегаются к положительному направлению оси 2.

К моменту времени t_5 векторы Блоха всех молекул направлены в одну и ту же сторону — в положительном направлении оси 2.

Вектор Блоха в горизонтальной плоскости означает наличие поляризации среды, а поворот вектора Блоха в горизонтальной плоскости равен сдвигу фазы поляризации относительно фазы светового поля.

Однонаправленность векторов Блоха в момент времени t_5 означает синфазность колебаний диполей всех молекул независимо от их лучевой скорости. Синфазные колебания приводят к синфазному излучению молекул в направлении проходящей световой волны. Синфазные излучения складываются по амплитуде, а не по интенсивности. В результате получается свет с большой амплитудой и интенсивностью. Это и есть фотонное эхо.

После момента времени t_5 векторы Блоха продолжают вращения вокруг вертикальной оси с разными скоростями и разбегаются веером вокруг положительного направления оси 2. Разбегание векторов Блоха веером в горизонтальной плоскости означает расфазировку излучения диполей молекул. Расфазировка диполей приводит к появлению сигнала ЗСП. То есть вторая половина сигнала фотонного эха представляет собой обычный сигнал ЗСП.

Перед моментом времени t_5 веер векторов Блоха сбегаются вокруг положительного направления оси 2. Схлопывание веера векторов означает фазировку диполей и соответственное увеличение интенсивности света в направлении проходящей световой волны. То есть перед моментом времени t_5 наблюдается тот же сигнал ЗСП только обращенный по времени. На этом промежутке времени вместо экспоненциального спада сигнала ЗСП наблюдается экспоненциальный рост с той же скоростью обращенного во времени сигнала ЗСП.

В результате можно сказать, что сигнал фотонного эха равен двум сигналам ЗСП.

В эксперименте трудно сделать так, чтобы площадь светового импульса была бы равна в точности $\frac{\pi}{2}$ или в точности π . Если в эксперименте по наблюдению фотонного эха площади двух световых импульсов не совсем

оптимальны $\begin{cases} S_1 \neq \frac{\pi}{2} \\ S_2 \neq \pi \end{cases}$, то сигнал фотонного эха все равно наблюдается, только

имеет меньшую амплитуду.

Измеряя зависимость амплитуды эха от времени задержки τ между двумя импульсами, можно измерить скорость затухания поляризации среды Γ и получить информацию о молекулярных столкновениях.

Константа Γ определяется из сравнения экспериментальной зависимости амплитуды эха от времени и зависимости:

$$S \sim e^{-2\Gamma \tau}.$$

Показатель экспоненты содержит сомножитель 2τ , так как поляризация среды затухает как на промежутке времени τ между $\frac{\pi}{2}$ и π импульсами, так и на промежутке τ между π импульсом и сигналом эха.