

**Дифференциальное уравнение для матрицы плотности**  
**(уравнение фон Неймана).**

$i\hbar \dot{\hat{\rho}} = [\hat{H}, \hat{\rho}]$  — дифференциальное уравнение для оператора матрицы плотности или уравнение фон Неймана. Это уравнение может быть выведено из дифференциальных уравнений для амплитуд вероятности. Мы не будем рассматривать этот вывод.

Здесь  $\hat{\rho}$  — оператор, соответствующий матрице плотности,  $[\hat{H}, \hat{\rho}] \equiv \hat{H}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{H}$  — коммутатор операторов.

Обсудим подробнее, что представляет собой оператор  $\hat{\rho}$ .

Оператор ставит в соответствие одной функции другую функцию, например,  $\frac{\partial}{\partial x}$  — оператор.

Что такое оператор  $\hat{\rho}$ ?

Чтобы ответить на этот вопрос, вернемся к рассмотрению собственных функций невозмущенного оператора Гамильтона  $\{\psi_n\}$ :

$$\hat{H}_0 \psi_n = E_n \psi_n.$$

Волновая функция произвольного состояния выражается через собственные функции невозмущенного оператора Гамильтона:

$$\Psi = \sum_n a_n e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}} \psi_n = \sum_n a_n \Psi_n.$$

В таком случае волновые функции соответствующие определенным значениям энергии  $\{\Psi_n\}$  также образуют базис в пространстве волновых функций, а амплитуды вероятности  $a_n$  — координаты вектора  $\Psi$  в этом базисе.

Вектор  $\Psi$  можно записать в виде столбца координат  $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \\ \vdots \end{pmatrix}$ .

Любой оператор делает из одной функции другую функцию, у которой будет другой набор координат в пространстве волновых функций.

Если оператор линейный, то столбец новых координат получается умножением некоторой матрицы на столбец старых координат. Такую матрицу называют матрицей, соответствующей рассматриваемому линейному оператору.

Существует взаимнооднозначное соответствие между линейными операторами и матрицами. Тогда матрице плотности тоже соответствует некоторый оператор  $\rho_{kn} \leftrightarrow \hat{\rho}$ . В отличие от других операторов нет никакого смысла действовать этим оператором на волновую функцию.

### Представления операторов.

$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$ , где  $\hat{V}$  — оператор возмущения.

Мы будем рассматривать в качестве возмущения взаимодействие атома или молекулы со световым полем. Кроме этого часто в качестве возмущения рассматривают часть магнитных взаимодействий внутри атома. Спин–спиновое взаимодействие, взаимодействие орбита — орбита, спин — своя орбита, спин — чужая орбита, ядерный спин — спин, ядерный спин — орбита.

От того, какие именно взаимодействия включены в оператор  $\hat{H}_0$  зависят собственные функции  $\{\psi_n\}$  оператора  $\hat{H}_0$ , а от базиса  $\{\psi_n\}$  зависят коэффициенты разложения  $a_n$ . От коэффициентов разложения зависят элементы матрицы плотности  $\rho_{kn} = \langle a_n^* a_k e^{-i\omega_{kn}t} \rangle$ , а от собственных функций зависят матрицы операторов всех физических величин  $F_{nk} = \int \psi_n^* \hat{F} \psi_k dV$ .

От того, какие взаимодействия включены в оператор  $\hat{H}_0$ , зависит вид матриц  $\rho_{kn}$  и  $F_{nk}$  или, как говорят, зависит матричное представление операторов.

Можно рассматривать представления операторов в базисе собственных функций, которые вообще не связаны с оператором Гамильтона, а являются собственными функциями других физических величин.

### Дифференциальные уравнения для элементов матрицы плотности.

Мы будем включать в оператор  $\hat{H}_0$  все взаимодействия внутри атома или молекулы, а возмущением  $\hat{V}$  будет служить оператор энергии взаимодействия со световым полем  $\vec{E}$ . Тогда  $\hat{V} = -(\vec{p}, \vec{E}(t)) = -pE(t) = -\hat{p}E(t)$  и

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - \hat{p}E(t).$$

Выясним, как выглядят матрицы операторов  $\hat{H}_0$  и  $\hat{p}$  в представлении собственных функций невозмущенного оператора Гамильтона  $\hat{H}_0$ .

По определению матрицы оператора любой физической величины  $F$ :

$$F_{nk} = \int \psi_n^* \hat{F} \psi_k dV.$$

Воспользуемся этим определением и найдем элементы матрицы  $H_{0_{nk}}$ :

$$H_{0_{nk}} = \int \psi_n^* \hat{H}_0 \psi_k dV.$$

Здесь  $\hat{H}_0 \psi_k = E_k \psi_k$ , так как  $\psi_k$  — собственные функции оператора  $\hat{H}_0$ , тогда

$$H_{0_{nk}} = \int \psi_n^* \hat{H}_0 \psi_k dV = \int \psi_n^* E_k \psi_k dV = E_k \int \psi_n^* \psi_k dV = E_k \delta_{nk} \quad \Rightarrow$$

$$\hat{H}_0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & E_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & E_n & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix} \quad \text{— матрица невозмущенного оператора}$$

Гамильтона в представлении собственных функций невозмущенного оператора Гамильтона.

Найдем теперь матрицу  $p_{nk}$  оператора  $\hat{p}$  проекции дипольного момента на единичный вектор поляризации световой волны.

Постоянный дипольный момент почти не реагирует на световое поле, поэтому диагональные элементы матрицы  $p_{nk}$  нас интересовать не будут. Мы будем считать, что  $p_{nn} = 0$ . Тогда

$$\hat{p} = \begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} & \dots \\ p_{21} & 0 & p_{23} & \dots \\ p_{31} & p_{32} & 0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \text{ где } p_{kn} = p_{nk}^*$$

Для двухуровневой системы получим:

$$\hat{H}_0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix},$$

$$\hat{p} = \begin{pmatrix} 0 & p_{12} \\ p_{21} & 0 \end{pmatrix}, \text{ где в общем случае } p_{12} = p_{21}^*, \text{ но выбором фазы}$$

собственной функции  $\psi_1$  можно добиться вещественности недиагональных элементов матрицы, тогда:

$$p_{12} = p_{21} = p, \text{ где } p = p_{nk} = (\vec{p}, \vec{e})_{nk} = \int \psi_n^*(\vec{p}, \vec{e}) \psi_k dV \quad \Rightarrow$$

$$\hat{p} = \begin{pmatrix} 0 & p \\ p & 0 \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда оператор возмущения, он же оператор взаимодействия со световым полем, примет следующий вид:

$$\hat{V} = -\hat{p}E(t) = -pE(t) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ где } E(t) = \varepsilon_0 \cos(\varphi) \quad \text{— напряженность}$$

электрического поля световой волны,  $\varphi = -((\vec{k}, \vec{r}) - \omega t + \varphi_0)$  — фаза световой волны.

Тогда уравнение Неймана  $i\hbar \dot{\hat{\rho}} = [\hat{H}, \hat{\rho}]$  или  $i\hbar \dot{\hat{\rho}} = (\hat{H}_0 + \hat{V})\hat{\rho} - \hat{\rho}(\hat{H}_0 + \hat{V})$  для двухуровневой системы в матричном виде в представлении собственных

функций невозмущенного оператора Гамильтона получится подстановкой в последнее равенство матриц  $\hat{H}_0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}$  и  $\hat{V} = -pE(t) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

После подстановки получаем:

$$i\hbar \begin{pmatrix} \dot{\rho}_{11} & \dot{\rho}_{12} \\ \dot{\rho}_{21} & \dot{\rho}_{22} \end{pmatrix} = \left( \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} - pE(t) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} - pE(t) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

Перемножим матрицы и получим равенство двух матриц размером два на два. Равенство двух матриц означает, четыре равенства для каждого из четырех элементов матрицы два на два. Тогда вместо матричного равенства (дифференциального уравнения) получается система из четырех дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{\rho}_{11} = -i \frac{pE(t)}{\hbar} (\rho_{12} - \rho_{21}) \\ \dot{\rho}_{12} + i\omega_{12}\rho_{12} = -i \frac{pE(t)}{\hbar} (\rho_{11} - \rho_{22}) \\ \dot{\rho}_{21} + i\omega_{21}\rho_{21} = i \frac{pE(t)}{\hbar} (\rho_{11} - \rho_{22}) \\ \dot{\rho}_{22} = i \frac{pE(t)}{\hbar} (\rho_{12} - \rho_{21}) \end{cases} .$$

Здесь введено обозначение  $\omega_{21} \equiv \frac{E_2 - E_1}{\hbar}$ . Заметим, что второе и третье уравнения комплексно сопряжены друг другу. По этой причине оставляют только одно из них, помня о том, что  $\rho_{12} = \rho_{21}^*$ . В результате получаем систему из трех дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{\rho}_{11} = -i \frac{pE(t)}{\hbar} (\rho_{12} - \rho_{21}) \\ \dot{\rho}_{22} = i \frac{pE(t)}{\hbar} (\rho_{12} - \rho_{21}) \\ \dot{\rho}_{21} + i\omega_{21}\rho_{21} = i \frac{pE(t)}{\hbar} (\rho_{11} - \rho_{22}) \end{cases} .$$

В эти уравнения добавляются слагаемые двух типов: феноменологическое затухание и накачку. В результате получают систему уравнений для матрицы плотности двухуровневой среды:

$$\begin{cases} \dot{\rho}_{11} + \gamma_1 \rho_{11} = \gamma_1 \rho_{11}^0 - i \frac{pE(t)}{\hbar} (\rho_{12} - \rho_{21}) \\ \dot{\rho}_{22} + \gamma_2 \rho_{22} = \gamma_2 \rho_{22}^0 + i \frac{pE(t)}{\hbar} (\rho_{12} - \rho_{21}) \\ \dot{\rho}_{21} + i\omega_{21} \rho_{21} + \Gamma \rho_{21} = i \frac{pE(t)}{\hbar} (\rho_{11} - \rho_{22}) \end{cases} \quad (2.5).$$

Здесь слагаемые  $\gamma_1 \rho_{11}^0$  и  $\gamma_2 \rho_{22}^0$  — накачка на уровни энергии 1 и 2. Подразумевается, что оба уровня энергии — возбужденные уровни. А слагаемые  $\gamma_1 \rho_{11}$ ,  $\gamma_2 \rho_{22}$  и  $\Gamma \rho_{21}$  представляют собой озвученное выше феноменологическое затухание. Феноменологическое означает, что оно не следует из построения теории, а добавлено для согласования с результатами опытов. Опытный факт состоит в том, что, если молекула находится в возбужденном состоянии, то в результате спонтанных переходов вниз вероятность обнаружить молекулу на этом уровне экспоненциально убывает со временем безо всякого влияния электрического поля внешней световой волны.

И действительно. Рассмотрим второе уравнение при условии отсутствия светового поля  $E(t) = 0$  и без накачки уровня энергии. Тогда получим

$$\dot{\rho}_{22} + \gamma_2 \rho_{22} = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид  $\rho_{22}(t) = \rho_{22}(0)e^{-\gamma_2 t}$ , что соответствует опытным данным. Для этого соответствия в дифференциальные уравнения для матрицы плотности и добавлено феноменологическое затухание в виде слагаемого  $\gamma_2 \rho_{22}$ . Аналогично введены слагаемые  $\gamma_1 \rho_{11}$  и  $\Gamma \rho_{21}$ .

Обсудим теперь накачку в виде слагаемых  $\gamma_1 \rho_{11}^0$  и  $\gamma_2 \rho_{22}^0$ . Если светового поля нет  $E(t) = 0$ , то через некоторое время вероятности  $\rho_{11}$  и  $\rho_{22}$  примут стационарные значения, а производные по времени  $\dot{\rho}_{11}$  и  $\dot{\rho}_{22}$  обратятся в ноль. Тогда уравнения 1 и 2 примут следующий вид:

$$\begin{cases} \gamma_1 \rho_{11} = \gamma_1 \rho_{11}^0 \\ \gamma_2 \rho_{22} = \gamma_2 \rho_{22}^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho_{11} = \rho_{11}^0 \\ \rho_{22} = \rho_{22}^0 \end{cases}.$$

Отсюда понятен смысл констант  $\rho_{11}^0$  и  $\rho_{22}^0$ , как стационарных значений вероятности обнаружить молекулу на нижнем и на верхнем уровнях энергии в случае, когда отсутствует световое поле. Стационарное значение устанавливается в результате равновесия накачки и спонтанных переходов с рассматриваемых уровней энергии на более низкие уровни. В качестве накачки может служить разряд в газе, в котором при соударении электронов с молекулами, молекулы могут переходить в возбужденное состояние. Если рассматривать возбужденные колебательные или вращательные уровни молекул, то накачка происходит за счет тепловых столкновений молекул.

Может быть накачка световым полем, например, на более высокие уровни энергии, с которых в результате спонтанных переходов заселяется интересующий нас уровень.

Если уровень 1 является нижним уровнем энергии атома или молекулы, то дифференциальные уравнения для элементов матрицы плотности нужно заменить на следующие уравнения:

$$\begin{cases} \dot{\rho}_{11} = -i \frac{pE(t)}{\hbar} (\rho_{12} - \rho_{21}) + \gamma_2 \rho_{22} - \gamma_2 \rho_{22}^0 \\ \dot{\rho}_{22} + \gamma_2 \rho_{22} = \gamma_2 \rho_{22}^0 + i \frac{pE(t)}{\hbar} (\rho_{12} - \rho_{21}) \\ \dot{\rho}_{21} + i\omega_{21} \rho_{21} + \Gamma \rho_{21} = i \frac{pE(t)}{\hbar} (\rho_{11} - \rho_{22}) \end{cases} .$$

Изменения произошли только в первом уравнении. В нем отсутствует феноменологическое затухание и накачка. Спонтанное затухание уровня 2 переводит молекулы не просто куда-нибудь, а именно на рассматриваемый уровень 1, поэтому в правой части первого уравнения появляется слагаемое  $\gamma_2 \rho_{22}$ . Слагаемое  $-\gamma_2 \rho_{22}^0$  связано с тем, что накачка на уровень 2 происходит с обеднением уровня 1.

-----

Полученные нами дифференциальные уравнения для элементов матрицы плотности описывают поведение матрицы плотности в системе отсчета молекулы. Часто эти уравнения записывают в лабораторной системе отсчета. Получим уравнения системы (2.5) в лабораторной системе отсчета.

Пусть свет распространяется вдоль оси  $z$ , тогда от координат  $x$  и  $y$  ничего не зависит.

Рассмотрим дифференциал любой функции координаты  $z$  и времени  $t$ :

$$d\dot{\cdot} = \frac{\partial \dot{\cdot}}{\partial t} dt + \frac{\partial \dot{\cdot}}{\partial z} dz \quad (2.6).$$

В уравнениях системы (2.5) производные по времени берутся в системе отсчета молекулы, где  $\frac{dz}{dt} = V_z$  — проекция скорости молекулы на луч, которую для краткости иногда будем называть лучевой скоростью молекулы. Тогда производная по времени в системе отсчета молекулы может быть выражена через производные по времени  $t$  и по  $z$  координате в лабораторной системе отсчета путем деления уравнения (2.6) на дифференциал времени  $dt$ :

$$\frac{d\dot{\cdot}}{dt} = \frac{\partial \dot{\cdot}}{\partial t} + V_z \frac{\partial \dot{\cdot}}{\partial z}.$$

Подставим это выражение для так называемой полной производной по времени в уравнения системы (2.5) и получим:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_{11}}{\partial t} + V_z \frac{\partial \rho_{11}}{\partial z} + \gamma_1 \rho_{11} = \gamma_1 \rho_{11}^0 - i \frac{pE(t)}{\hbar} (\rho_{12} - \rho_{21}) \\ \frac{\partial \rho_{22}}{\partial t} + V_z \frac{\partial \rho_{22}}{\partial z} + \gamma_2 \rho_{22} = \gamma_2 \rho_{22}^0 + i \frac{pE(t)}{\hbar} (\rho_{12} - \rho_{21}) \\ \frac{\partial \rho_{21}}{\partial t} + V_z \frac{\partial \rho_{21}}{\partial z} + i\omega_{21} \rho_{21} + \Gamma \rho_{21} = i \frac{pE(t)}{\hbar} (\rho_{11} - \rho_{22}) \end{cases} .$$

В таком виде под матрицей плотности понимают характеристики среды, а не усредненной молекулы среды. При такой интерпретации матрицы плотности логично добавить к нашему определению ее элементов традиционный сомножитель — распределение  $N_{V_z}$  концентрации молекул  $N$  по  $V_z$  проекции скорости молекул на луч.

Мы всегда будем рассматривать и решать дифференциальные уравнения для матрицы плотности только в системе отсчета молекулы (2.5).

В системе отсчета молекулы параметры световой волны не совсем такие, как в лабораторной системе отсчета. Обсудим эти отличия.

Амплитуда  $\mathcal{E}_0$  световой волны  $\mathcal{E}_0 \cos(\omega t - kz - \varphi_0)$  мало изменяется при переходе из одной системы отсчета в другую. Относительное изменение амплитуды имеет порядок  $\frac{V_z}{c}$ , где  $V_z$  — проекция скорости молекул на луч или лучевая скорость.

Фаза световой волны — скаляр по группе Лоренца  $\varphi' = \varphi$ , поэтому с учетом слабой зависимости амплитуды  $\mathcal{E}_0$  от системы отсчета получим примерно одинаковое выражение для светового поля в обеих системах отсчета:

$$E(t, z) = \mathcal{E}_0 \cos(\varphi) = \mathcal{E}_0 \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} .$$

Изменение величины  $kz$  при переходе из одной системы отсчета в другую нас интересовать не будет, так как в системе отсчета молекулы  $z$  координата — константа.

Частота света в системе отсчета молекулы  $\omega'$  отличается от частоты света в лабораторной системе отсчета  $\omega$  за счет продольного эффекта Доплера:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} \approx \frac{V_z}{c}, \text{ тогда, пренебрегая поправками порядка } \frac{V_z^2}{c^2}, \text{ получим}$$

$$\omega' = \omega - \frac{V_z}{c} \omega = \omega - kV_z, \text{ где } k = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ — волновое число.}$$

Окончательно получаем, что при переходе из лабораторной системы отсчета в систему отсчета молекулы формула для светового поля не изменяется

$$E(t, z) = \mathcal{E}_0 \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \text{ а частота поля изменяется по формуле } \omega' = \omega - kV_z .$$

### Приближение вращающейся волны.

Рассмотрим уравнения для матрицы плотности в системе отсчета атома (или молекулы).

$$\begin{cases} \dot{\rho}_{11} + \gamma_1 \rho_{11} = \gamma_1 \rho_{11}^0 - i \frac{pE(t)}{\hbar} (\rho_{12} - \rho_{21}) \\ \dot{\rho}_{22} + \gamma_2 \rho_{22} = \gamma_2 \rho_{22}^0 + i \frac{pE(t)}{\hbar} (\rho_{12} - \rho_{21}) \\ \dot{\rho}_{21} + i\omega_{21} \rho_{21} + \Gamma \rho_{21} = i \frac{pE(t)}{\hbar} (\rho_{11} - \rho_{22}) \end{cases} \quad (3.1)$$

Введем некоторые упрощающие предположения. Упрощения будут вполне справедливы, если вероятности обнаружить атом на уровнях 1 и 2  $\rho_{11}$  и  $\rho_{22}$  не успевают заметно измениться за период световой волны.

Сначала рассмотрим предельный случай:  $\rho_{11} - \rho_{22} = const$ .

Рассмотрим 3-е уравнение системы

$$\dot{\rho}_{21} + i\omega_{21} \rho_{21} + \Gamma \rho_{21} = i \frac{pE(t)}{\hbar} (\rho_{11} - \rho_{22})$$

и подставим в него выражение для напряженности электрического поля  $E(t)$  в явном виде:

$$E(t) = \varepsilon_0 \cos(\varphi) = \varepsilon_0 \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \text{ где } \varphi \text{ — фаза световой волны } \varphi = \omega't - \varphi'_0.$$

Тогда

$$\dot{\rho}_{21} + i\omega_{21} \rho_{21} + \Gamma \rho_{21} = i \frac{p\varepsilon_0}{\hbar} \cdot \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \cdot (\rho_{11} - \rho_{22}) \quad (3.2)$$

В правой части этого равенства есть слагаемые с "+" и "-" оптической частотой:  $e^{i\varphi}$  и  $e^{-i\varphi}$ . Тогда решение для  $\rho_{21}$  нужно искать в виде суммы двух аналогичных слагаемых:

$$\rho_{21} = \rho_{21+} e^{i\varphi} + \rho_{21-} e^{-i\varphi}, \text{ где } \rho_{21+} \text{ и } \rho_{21-} \text{ — постоянные амплитуды.}$$

Чуть позднее мы откажемся от предположения  $\rho_{11} - \rho_{22} = const$  и амплитуды  $\rho_{21+}$  и  $\rho_{21-}$  станут функциями времени. Пока же  $\rho_{21+} = const$  и  $\rho_{21-} = const$ . Тогда из условия  $\rho_{21} = \rho_{21+} e^{i\varphi} + \rho_{21-} e^{-i\varphi}$  получаем в результате дифференцирования по времени:

$$\dot{\rho}_{21} = i\omega' \rho_{21+} e^{i\varphi} - i\omega' \rho_{21-} e^{-i\varphi}.$$

Подставим это выражение для  $\dot{\rho}_{21}$  и  $\rho_{21} = \rho_{21+} e^{i\varphi} + \rho_{21-} e^{-i\varphi}$  в уравнение (3.2). Соберем отдельно слагаемые с  $e^{i\varphi}$  и  $e^{-i\varphi}$  и получим два уравнения:

$$\begin{cases} i\omega' \rho_{21+} + i\omega_{21} \rho_{21+} + \Gamma \rho_{21+} = i \frac{p\varepsilon_0}{2\hbar} (\rho_{11} - \rho_{22}) \\ -i\omega' \rho_{21-} + i\omega_{21} \rho_{21-} + \Gamma \rho_{21-} = i \frac{p\varepsilon_0}{2\hbar} (\rho_{11} - \rho_{22}) \end{cases} \Rightarrow$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{21+} = i \frac{p \mathcal{E}_0}{2\hbar} \cdot \frac{\rho_{11} - \rho_{22}}{\Gamma + i(\omega_{21} + \omega')} \\ \rho_{21-} = i \frac{p \mathcal{E}_0}{2\hbar} \cdot \frac{\rho_{11} - \rho_{22}}{\Gamma + i(\omega_{21} - \omega')} \end{array} \right. \Rightarrow |\rho_{21-}| \gg |\rho_{21+}|$$

Тогда  $\rho_{21+}$  можно отбросить в выражении  $\rho_{21} = \rho_{21+} e^{i\varphi} + \rho_{21-} e^{-i\varphi}$  и отбросить  $\frac{\mathcal{E}_0}{2} e^{i\varphi}$  в выражении  $\mathcal{E}_0 \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$  в правой части уравнения (3.2).

Тогда выражение для светового поля принимает вид:  $E = \frac{1}{2} \mathcal{E}_0 e^{-i\varphi}$  — вид вектора вращающегося на комплексной плоскости по часовой стрелке с угловой скоростью  $\omega'$ .

По этой причине рассматриваемое приближение называется приближением вращающейся волны.

Аналогичные отбрасывания то одной, то другой части светового поля будут и в двух первых уравнениях системы (3.1).

Итак, если отбросить малое слагаемое  $\rho_{21+} e^{i\varphi}$ , то недиагональный элемент матрицы плотности примет вид:

$$\rho_{21} = \rho_{21-} e^{-i\varphi} \equiv \tilde{\rho}_{21} e^{-i\varphi},$$

где  $\tilde{\rho}_{21}$  — комплексная амплитуда недиагонального элемента  $\rho_{21}$ .

Откажемся теперь от первоначального предположения, что  $\rho_{11} - \rho_{22} = const$ . В таком случае все равно можно считать, что

$$\rho_{21} = \tilde{\rho}_{21} e^{-i\varphi}, \quad (3.3)$$

но только  $\tilde{\rho}_{21}$  окажется теперь функцией времени, хотя и медленной по сравнению с оптическими колебаниями.

Продифференцируем уравнение (3.3) по времени и с учетом того, что  $\varphi$  тоже зависит от времени  $\varphi = \omega' t - \varphi'_0$ , получим:

$$\dot{\rho}_{21} = \dot{\tilde{\rho}}_{21} e^{-i\varphi} - i\omega' \tilde{\rho}_{21} e^{-i\varphi} \quad (3.4)$$

Подставим (3.3) и (3.4) в уравнение (3.2), в духе приближения вращающейся волны, отбросим в правой части слагаемое, пропорциональное  $e^{i\varphi}$ , и, после сокращения на  $e^{-i\varphi}$ , получим:

$$\dot{\tilde{\rho}}_{21} - i\Omega \tilde{\rho}_{21} + \Gamma \tilde{\rho}_{21} = i \frac{R}{2} (\rho_{11} - \rho_{22}) \quad (3.5)$$

Здесь введены обозначения:

$\Omega \equiv \omega' - \omega_{21} = \omega - kV_z - \omega_{21}$  — расстройка частоты света  $\omega'$  относительно частоты перехода  $\omega_{21}$  в системе отсчета атома,

$$R \equiv \frac{p \mathcal{E}_0}{\hbar} \text{ — частота Раби.}$$

Найдем теперь, как изменится правая часть первых двух уравнений системы (3.1) в приближении вращающейся волны, если подставить  $\rho_{21} = \tilde{\rho}_{21}e^{-i\varphi}$ .

Рассмотрим

$$\begin{aligned} E(t) \cdot (\rho_{12} - \rho_{21}) &= \varepsilon_0 \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \cdot \left( (\rho_{21})^* - \rho_{21} \right) = \\ &= \varepsilon_0 \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \cdot \left( \tilde{\rho}_{12}e^{i\varphi} - \tilde{\rho}_{21}e^{-i\varphi} \right) \approx \frac{\varepsilon_0}{2} (\tilde{\rho}_{12} - \tilde{\rho}_{21}). \end{aligned}$$

В последнем равенстве отброшены слагаемые с удвоенной оптической частотой, так как раскачивание  $\rho_{11}$  и  $\rho_{22}$  на этой частоте мало эффективно.

И действительно:

$$(\gamma_1 \rho_{11})_{2\omega'} \ll \left( \dot{\rho}_{11} \right)_{2\omega'} \approx \left( \dot{\rho}_{11} \right)_0 \approx (\gamma_1 \rho_{11})_0, \quad (3.6)$$

где:

$(2\omega')$  — слагаемые на удвоенной оптической частоте,

$(0)$  — слагаемые на нулевой частоте.

Первое неравенство связано с тем, что  $\gamma_1 \ll 2\omega'$ , и с тем, что при дифференцировании величины, осциллирующей на частоте  $(2\omega')$ , перед дифференцируемой величиной появляется множитель  $(2\omega')$ .

Приблизительное равенство в середине цепочки (3.6) связано с тем, что правая часть первого уравнения системы (3.1) имеет одинаковую амплитуду на частоте  $2\omega'$  и на частоте 0.

Правое равенство в цепочке (3.6) связано с тем, что, если нет накачки на уровень 1 и нет светового поля, то величины в двух частях равенства в точности равны по модулю. В остальных случаях это величины одного порядка.

Сравнивая начало и конец цепочки (3.6), получаем:

$$(\rho_{11})_{2\omega'} \ll (\rho_{11})_0.$$

То есть, осцилляциями величин  $\rho_{11}$  и  $\rho_{22}$  на удвоенной оптической частоте можно пренебречь.

Отбрасывая осцилляции величин  $\rho_{11}$  и  $\rho_{22}$  на удвоенной оптической частоте в двух первых уравнениях системы (3.1), получим ту же систему уравнений в новом виде:

$$\begin{cases} \dot{\rho}_{11} + \gamma_1 \rho_{11} = \gamma_1 \rho_{11}^0 - i \frac{R}{2} (\tilde{\rho}_{12} - \tilde{\rho}_{21}) \\ \dot{\rho}_{22} + \gamma_2 \rho_{22} = \gamma_2 \rho_{22}^0 + i \frac{R}{2} (\tilde{\rho}_{12} - \tilde{\rho}_{21}) \\ \dot{\tilde{\rho}}_{21} - i\Omega \tilde{\rho}_{21} + \Gamma \tilde{\rho}_{21} = i \frac{R}{2} (\rho_{11} - \rho_{22}) \end{cases} \quad (3.7)$$

Это и есть уравнения для матрицы плотности в приближении вращающейся волны.

Для решения любой квантовомеханической задачи нужно сначала решить систему уравнений (3.7), затем по полученной амплитуде  $\tilde{\rho}_{21}$  найти недиагональные элементы матрицы плотности

$$\rho_{21} = \tilde{\rho}_{21} e^{-i\varphi} \text{ и } \rho_{12} = \rho_{21}^* .$$

А далее через элементы матрицы плотности  $\rho_{nk}$  найти любую измеряемую величину  $F$  :

$$\langle F \rangle = Sp(\hat{\rho} \hat{F}) = \sum_{n,k} \rho_{nk} F_{kn} .$$

Здесь, как и раньше:

$$\left\{ \begin{array}{l} R = \frac{p \mathcal{E}_0}{\hbar} \\ \Omega = \omega - kV_z - \omega_{21} \\ \varphi = \omega t - kz - \varphi_0 = \omega' t - \varphi'_0 \\ p = \int_{V=\infty} \psi_1^* (\vec{p}, \vec{e}) \psi_2 dV \\ F_{kn} = \int_{V=\infty} \psi_k^* \hat{F} \psi_n dV \end{array} \right.$$

### Реакция двухуровневой среды на поле монохроматической волны.

Рассмотрим решение дифференциальных уравнений для матрицы плотности двухуровневой среды в приближении вращающейся волны:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\rho}_{11} + \gamma_1 \rho_{11} = \gamma_1 \rho_{11}^0 - i \frac{R}{2} (\tilde{\rho}_{12} - \tilde{\rho}_{21}) \\ \dot{\rho}_{22} + \gamma_2 \rho_{22} = \gamma_2 \rho_{22}^0 + i \frac{R}{2} (\tilde{\rho}_{12} - \tilde{\rho}_{21}) \\ \dot{\tilde{\rho}}_{21} - i \Omega \tilde{\rho}_{21} + \Gamma \tilde{\rho}_{21} = i \frac{R}{2} (\rho_{11} - \rho_{22}) \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Будем искать решение в стационарном случае, когда  $\dot{\rho}_{11} = \dot{\rho}_{22} = \dot{\tilde{\rho}}_{21} = 0$ .

Из третьего уравнения системы (3.7) при условии  $\dot{\tilde{\rho}}_{21} = 0$  получим:

$$\tilde{\rho}_{21} = i \frac{R}{2} \cdot \frac{\rho_{11} - \rho_{22}}{\Gamma - i \Omega} \quad (3.8).$$

Здесь  $\Omega = \omega' - \omega_{21} = \omega - kV_z - \omega_{21}$  — расстройка частоты света в системе отсчета молекулы относительно частоты поглощающего перехода.

Найдем  $\tilde{\rho}_{12} - \tilde{\rho}_{21}$ , чтобы подставить это выражение в два первых уравнения системы (3.7).

$$\tilde{\rho}_{12} - \tilde{\rho}_{21} = \tilde{\rho}_{21}^* - \tilde{\rho}_{21} = \left( -i \frac{R}{2} \cdot \frac{\rho_{11} - \rho_{22}}{\Gamma + i\Omega} \right) - \left( i \frac{R}{2} \cdot \frac{\rho_{11} - \rho_{22}}{\Gamma - i\Omega} \right) = -iR \frac{\rho_{11} - \rho_{22}}{\Gamma^2 + \Omega^2} \Gamma$$

В два первых уравнения системы входит выражение

$$i \frac{R}{2} (\tilde{\rho}_{12} - \tilde{\rho}_{21}) = \frac{R^2}{2\Gamma} \cdot (\rho_{11} - \rho_{22}) \cdot \mathcal{L} \left( \frac{\Omega}{\Gamma} \right),$$

где  $\mathcal{L}(x) \equiv \frac{1}{1+x^2}$  — так называемый лоренцевский контур.

Подставим его и получим

$$\begin{cases} \rho_{11} = \rho_{11}^0 - \frac{R^2}{2\gamma_1\Gamma} (\rho_{11} - \rho_{22}) \cdot \mathcal{L} \left( \frac{\Omega}{\Gamma} \right) \\ \rho_{22} = \rho_{22}^0 + \frac{R^2}{2\gamma_2\Gamma} (\rho_{11} - \rho_{22}) \cdot \mathcal{L} \left( \frac{\Omega}{\Gamma} \right) \end{cases} \quad (3.9)$$

Возьмем разность этих двух уравнений и разрешим полученное уравнение относительно разности  $(\rho_{11} - \rho_{22})$ . В результате получим решение

$$\rho_{11} - \rho_{22} = (\rho_{11}^0 - \rho_{22}^0) \cdot \left( 1 - \frac{G}{1+G} \cdot \mathcal{L} \left( \frac{\Omega}{\Gamma\sqrt{1+G}} \right) \right) \quad (3.10),$$

где  $G \equiv \frac{R^2}{2\Gamma} \cdot \left( \frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} \right)$  — фактор насыщения или безразмерная мощность

световой волны.

Окончательное решение для переменных  $\rho_{11}$  и  $\rho_{22}$  получается при подстановке выражения (3.10) в правую часть уравнений системы (3.9). Подставляем и получаем решение для диагональных элементов матрицы плотности:

$$\begin{cases} \rho_{11} = \rho_{11}^0 - (\rho_{11}^0 - \rho_{22}^0) \cdot \frac{\gamma_2 G}{\gamma_1 + \gamma_2} \cdot \left( 1 - \frac{G}{1+G} \cdot \mathcal{L} \left( \frac{\Omega}{\Gamma\sqrt{1+G}} \right) \right) \cdot \mathcal{L} \left( \frac{\Omega}{\Gamma} \right) \\ \rho_{22} = \rho_{22}^0 + (\rho_{11}^0 - \rho_{22}^0) \cdot \frac{\gamma_1 G}{\gamma_1 + \gamma_2} \cdot \left( 1 - \frac{G}{1+G} \cdot \mathcal{L} \left( \frac{\Omega}{\Gamma\sqrt{1+G}} \right) \right) \cdot \mathcal{L} \left( \frac{\Omega}{\Gamma} \right) \end{cases} \quad (3.11).$$

Подставляем (3.10) в (3.8) и получаем решение для недиагонального элемента матрицы плотности:

$$\tilde{\rho}_{21} = i \cdot \sqrt{\frac{\Gamma\gamma_1\gamma_2 G}{2(\gamma_1 + \gamma_2)}} \cdot \frac{\rho_{11}^0 - \rho_{22}^0}{\Gamma - i\Omega} \cdot \left( 1 - \frac{G}{1+G} \cdot \mathcal{L} \left( \frac{\Omega}{\Gamma\sqrt{1+G}} \right) \right).$$

Проанализируем полученное решение для элементов матрицы плотности. Для анализа решения удобно ввести два новых понятия: заселенность уровня энергии и комплексная поляризация среды.

### **Провал и пик Беннета.**

$N_1 \equiv N_0 \rho_{11}$  — заселенность или населенность 1-го уровня энергии,

$N_2 \equiv N_0 \rho_{22}$  — заселенность 2-го уровня энергии.

Здесь  $N_0$  — концентрация молекул или число молекул в единице объема.

Заселенность уровня энергии — это как бы концентрация молекул на этом уровне. Только как бы концентрация, так как в световом поле каждая молекула одновременно находится на двух уровнях энергии, связанных световым полем.

Введем обозначение для распределения концентрации по лучевой скорости молекул  $N_{0V_z}$ .

Для любой физической величины  $F$  связь ее и ее распределения  $F_{V_z}$  по лучевой скорости имеет следующий вид:

$$F = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{V_z} dV_z.$$

Аналогично для концентрации молекул  $N_0$ :

$$N_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} N_{0V_z} dV_z,$$

где  $N_{0V_z} dV_z$  — концентрация молекул, лучевые скорости которых лежат в диапазоне от  $V_z$  до  $V_z + dV_z$ .

Распределение молекул по лучевой скорости при термодинамическом равновесии — это распределение Максвелла по проекции скорости:

$$N_{0V_z} = \frac{N_0}{\sqrt{\pi}U} \cdot e^{-\frac{V_z^2}{U^2}}, \text{ где } U = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}} \text{ — наиболее вероятная скорость.}$$

$N_{1V_z} \equiv N_{0V_z} \cdot \rho_{11}(V_z)$  — распределение заселенности нижнего уровня энергии по лучевой скорости молекул,

$N_{2V_z} \equiv N_{0V_z} \cdot \rho_{22}(V_z)$  — распределение заселенности верхнего уровня энергии по лучевой скорости молекул.

Здесь и в будущем будем различать распределение любой физической величины  $F$  по лучевой скорости  $F_{V_z}$  и функцию величины  $F$  от лучевой скорости  $F(V_z)$ . Для распределения  $F_{V_z}$  интеграл от него по лучевой скорости

равен самой величине  $F$ , то есть  $F = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{V_z} dV_z$ , а для функции  $F(V_z)$  нет никакого смысла интегрировать ее по лучевой скорости.

Умножим равенство (3.11) на распределение концентрации молекул по

проекции скорости на луч  $N_{0V_z} = \frac{N_0}{\sqrt{\pi}U} \cdot e^{-\frac{V_z^2}{U^2}}$  и получим

$$\begin{cases} N_{1V_z} = N_{1V_z}^0 - (N_{1V_z}^0 - N_{2V_z}^0) \cdot \frac{\gamma_2 G}{\gamma_1 + \gamma_2} \cdot \left(1 - \frac{G}{1+G} \cdot \mathcal{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma\sqrt{1+G}}\right)\right) \cdot \mathcal{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right) \\ N_{2V_z} = N_{2V_z}^0 + (N_{1V_z}^0 - N_{2V_z}^0) \cdot \frac{\gamma_1 G}{\gamma_1 + \gamma_2} \cdot \left(1 - \frac{G}{1+G} \cdot \mathcal{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma\sqrt{1+G}}\right)\right) \cdot \mathcal{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right) \end{cases}$$

Откуда получим

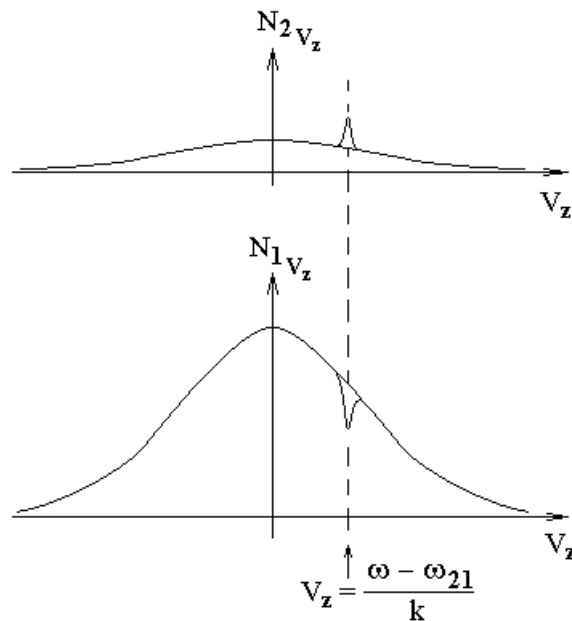
$$\begin{cases} N_{1V_z} - N_{1V_z}^0 = - (N_{1V_z}^0 - N_{2V_z}^0) \cdot \frac{\gamma_2 G}{\gamma_1 + \gamma_2} \cdot \left(1 - \frac{G}{1+G} \cdot \mathcal{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma\sqrt{1+G}}\right)\right) \cdot \mathcal{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right) \\ N_{2V_z} - N_{2V_z}^0 = (N_{1V_z}^0 - N_{2V_z}^0) \cdot \frac{\gamma_1 G}{\gamma_1 + \gamma_2} \cdot \left(1 - \frac{G}{1+G} \cdot \mathcal{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma\sqrt{1+G}}\right)\right) \cdot \mathcal{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right) \end{cases}$$

Здесь зависимость  $(N_{1V_z} - N_{1V_z}^0)$  от  $V_z$  называют провалом Беннета, а зависимость  $(N_{2V_z} - N_{2V_z}^0)$  от  $V_z$  называют пиком Беннета.

$$N_{1V_z}^0 - N_{2V_z}^0 = (N_1^0 - N_2^0) \cdot \frac{N_{0V_z}}{N_0} = (\rho_{11}^0 - \rho_{22}^0) \cdot N_{0V_z}, \text{ где } N_{0V_z} = \frac{N_0}{\sqrt{\pi}U} \cdot e^{-\frac{V_z^2}{U^2}}$$

— распределение Максвелла по проекции скорости молекул.

Рассмотрим две эти зависимости при условии слабого светового поля  $G \ll 1$ , где фактор насыщения  $G \equiv \frac{R^2}{2\Gamma} \cdot \left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2}\right)$ , и при условии неоднородного уширения спектральной линии, когда доплеровская ширина спектральной линии гораздо больше лоренцевской ширины спектральной линии каждой молекулы  $kU \gg \Gamma$ .



В случае неоднородного уширения спектральной линии

$N_{0V_z} = \frac{N_0}{\sqrt{\pi}U} \cdot e^{-\frac{V_z^2}{U^2}}$  — широкий доплеровский контур в зависимости от лучевой

скорости  $V_z$ , а  $\mathcal{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right) = \frac{\Gamma^2}{\Omega^2 + \Gamma^2}$  — узкий лоренцевский контур в зависимости от расстройки  $\Omega = \omega - kV_z - \omega_{21}$  частоты светового поля  $\omega$  от частоты перехода  $\omega_{21}$ .

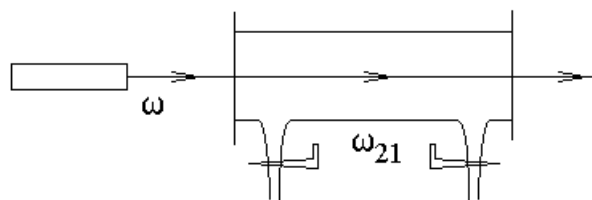
Изменение частоты  $\Delta\Omega$  и изменение лучевой скорости  $\Delta V_z$  пропорциональны друг другу  $\Delta\Omega = -k\Delta V_z$ . Тогда  $kU$  — полуширина доплеровского контура в шкале частот на уровне  $\frac{1}{e}$ ,  $\Gamma$  — полуширина на полувысоте для лоренцевского контура.

Качественно объяснить появление провала и пика Беннета можно следующим образом. Без светового поля в соответствии с распределением Больцмана на нижнем уровне энергии больше молекул, чем на верхнем уровне. Световое поле перебрасывает молекулы с нижнего уровня энергии на верхний уровень, а с верхнего на нижний. Таким образом, световое поле уменьшает заселенность нижнего уровня энергии и увеличивает заселенность верхнего уровня, но делает это только для молекул с одним значением лучевой скорости. Значение лучевой скорости определяется тем, что сдвинутая эффектом Доплера частота света в системе отсчета молекулы должна совпадать с частотой поглощающего перехода. Уменьшение для этой лучевой скорости разности заселенностей и приводит к появлению провала Беннета в распределении заселенности нижнего уровня по лучевой скорости и к появлению пика Беннета в распределении заселенности верхнего уровня.

Короче, свет переводит молекулы вверх-вниз для такого значения  $V_z$ , что  $\omega - kV_z = \omega_{21}$ .

### Светоиндуцированный дрейф. Разделение изотопов.

Рассмотрим следующую оптическую схему. Пусть монохроматическое излучение лазера с частотой  $\omega$  проходит через кювету с газовой смесью двух изотопов.



Линии поглощения изотопов несколько сдвинуты по частоте друг относительно друга. Пусть частота излучения лазера лежит в пределах

доплеровского контура линии поглощения одного из двух изотопов с центром на частоте  $\omega_{21}$ .

Пусть для определенности частота лазера выше частоты поглощающего перехода  $\omega > \omega_{21}$ . Тогда  $V_z = \frac{\omega - \omega_{21}}{k} > 0$ . Это означает, что излучение лазера поглощают молекулы, летящие в направлении луча. Поглощая свет и переходя в возбужденное состояние, молекулы разбухают, так как в возбужденном состоянии молекула имеет большие размеры, чем в невозмущенном состоянии. Большие молекулы чаще сталкиваются, так как имеют большую площадь поперечного сечения.

Рассмотрим два набора молекул одного и того же изотопа, но с противоположными значениями лучевой скорости. Пусть один из двух наборов молекул с лучевой скоростью  $V_z > 0$  взаимодействует со светом. Молекулы из этого набора летят вдоль лазерного луча, чаще сталкиваются и поэтому сильнее тормозятся. Следовательно, центр масс двух наборов молекул начинает смещаться навстречу лазерному лучу.

В результате поглощающий свет изотоп скапливается около окна кюветы, расположенного ближе к лазеру. Второй изотоп выдавливается из этой области в ту часть кюветы, которая расположена дальше от лазера.

Через один из кранов, расположенных в концах кюветы, можно откачать смесь, обогащенную одним из двух изотопов.

### Поляризация среды.

Поляризация — это электрический дипольный момент единицы объема.

При взаимодействии среды со световым полем в молекулах среды возникает дипольный момент, осциллирующий на частоте световой волны. Именно этот дипольный момент и связанная с ним поляризация среды на частоте световой волны нас и будут интересовать

$$\vec{P} \equiv \frac{d\vec{p}}{dV}, \text{ где } \vec{P} \text{ — поляризация среды, } \vec{p} \equiv \sum_i q_i \vec{r}_i \text{ — дипольный момент}$$

системы зарядов  $\{q_i\}$ , расположенных в точках с радиус-векторами  $\{\vec{r}_i\}$ .

$$\vec{P} = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{P}_{V_z} dV_z, \text{ где } \vec{P}_{V_z} \text{ — распределение поляризации по лучевой}$$

скорости молекул,  $\vec{P}_{V_z} dV_z$  — поляризация молекул с лучевыми скоростями в диапазоне от  $V_z$  до  $V_z + dV_z$ .

$\vec{P} = N_0 \cdot \langle \vec{p} \rangle$ , где  $N_0$  — концентрация молекул,  $\langle \vec{p} \rangle$  — среднее значение дипольного момента одной молекулы.

Рассмотрим поляризацию молекул с лучевыми скоростями в диапазоне от  $V_z$  до  $V_z + dV_z$ :



$\vec{P}_{V_z} dV_z = N_{0V_z} dV_z \cdot \langle \vec{p}(V_z) \rangle$ , где  $N_{0V_z} dV_z$  — концентрация молекул с лучевыми скоростями в диапазоне от  $V_z$  до  $V_z + dV_z$ ,  $\langle \vec{p}(V_z) \rangle$  — средний дипольный момент этих молекул, который может зависеть от лучевой скорости  $V_z$ .

Для любой физической величины  $\langle F \rangle = Sp(\hat{\rho}\hat{F}) = \sum_{n,k} \rho_{kn} F_{nk}$ . Тогда

$$\langle p \rangle = Sp(\hat{\rho}\hat{p}) = \sum_{n,k} \rho_{kn} p_{nk} = \rho_{12} p_{21} + \rho_{21} p_{12} = p(\rho_{12} + \rho_{21}) = 2p \operatorname{Re}(\rho_{21}),$$

где  $\langle p \rangle$  — среднее значение проекции дипольного момента молекулы на единичный вектор поляризации световой волны,  $p$  в правой части равенства — недиагональный матричный элемент проекции дипольного момента перехода на единичный вектор поляризации световой волны (дипольный момент перехода).

При взаимодействии двухуровневой среды с монохроматическим световым полем в приближении вращающейся волны недиагональный элемент матрицы плотности имеет вид:

$$\rho_{21} = \tilde{\rho}_{21} e^{-i\varphi}, \quad \text{где } \varphi \equiv \omega t - kz - \varphi_0 \quad \text{— фаза световой волны,}$$

$$\tilde{\rho}_{21} = i \frac{R}{2} \cdot \frac{\rho_{11} - \rho_{22}}{\Gamma - i\Omega}.$$

Тогда

$$\langle p \rangle = p(\rho_{12} + \rho_{21}) = p(\rho_{21}^* + \rho_{21}) = 2p \operatorname{Re} \left( i \frac{R}{2} \cdot \frac{\rho_{11} - \rho_{22}}{\Gamma - i\Omega} e^{-i\varphi} \right) =$$

$$= pR(\rho_{11} - \rho_{22}) \frac{\Gamma \cdot \sin(\varphi) - \Omega \cdot \cos(\varphi)}{\Gamma^2 + \Omega^2}.$$

Тогда

$$P_{V_z} = N_{0V_z} \langle p \rangle = N_{0V_z} pR(\rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z)) \frac{\Gamma \cdot \sin(\varphi) - \Omega \cdot \cos(\varphi)}{\Gamma^2 + \Omega^2},$$

$$\text{где } \left\{ \begin{array}{l} \Omega = \omega - kV_z - \omega_{21} \\ R = \frac{p\varepsilon_0}{\hbar} \\ \varphi = -\varphi_0 + \omega t - kz \\ N_{0V_z} = \frac{N_0}{\sqrt{\pi U}} e^{-\frac{V_z^2}{U^2}} \\ p = \int \psi_1^*(\vec{p}, \vec{e}) \psi_2 dV \\ \vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i \\ \vec{E}(t) = \varepsilon_0 \vec{e} \cdot \cos(\varphi) \end{array} \right. .$$

Получается, что поляризация среды пропорциональна амплитуде светового поля  $P \sim \varepsilon_0$ , но сдвинута по фазе относительно осцилляций светового поля.

Для описания такой поляризации вводят в рассмотрение комплексную восприимчивость среды.

Сначала введем комплексную напряженность  $\tilde{E}(t)$  световой волны, соответствующую вещественной напряженности  $E(t) = \varepsilon_0 \cos(\varphi)$ :

$$\tilde{E}(t) = \varepsilon_0 \cdot e^{-i\varphi}.$$

$$\text{Тогда } E(t) = \text{Re}(\tilde{E}(t)) = \frac{\tilde{E}(t) + \text{к.с.}}{2}.$$

$\tilde{P} = \tilde{\chi} \tilde{E}(t)$  — определение комплексной восприимчивости  $\tilde{\chi}$ , как коэффициента пропорциональности между комплексной поляризацией  $\tilde{P}$  и комплексной напряженностью  $\tilde{E}(t)$ .

Выразим комплексное число  $\tilde{\chi}$  через два вещественных числа  $\chi'$  и  $\chi''$ :

$$\tilde{\chi} = \chi' + i\chi''.$$

Выразим вещественную поляризацию среды, осциллирующую с частотой световой волны, через вещественную и мнимую части комплексной восприимчивости среды.

$$\begin{aligned} P &= \text{Re}(\tilde{P}) = \frac{\tilde{P} + \text{к.с.}}{2} = \frac{\tilde{\chi} \tilde{E}(t) + \text{к.с.}}{2} = \frac{1}{2} (\chi' + i\chi'') \varepsilon_0 e^{-i\varphi} + \text{к.с.} = \\ &= \frac{1}{2} (\chi' + i\chi'') \varepsilon_0 (\cos(\varphi) - i \sin(\varphi)) + \text{к.с.} = \varepsilon_0 (\chi' \cos(\varphi) + \chi'' \sin(\varphi)). \\ P &= \varepsilon_0 (\chi' \cos(\varphi) + \chi'' \sin(\varphi)). \end{aligned}$$

Соответствующее равенство для распределений по лучевой скорости:

$$P_{V_z} = \varepsilon_0 (\chi'_{V_z} \cos(\varphi) + \chi''_{V_z} \sin(\varphi)).$$

Сравним это выражение с полученным ранее выражением

$$P_{V_z} = N_{0V_z} pR (\rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z)) \frac{\Gamma \cdot \sin(\varphi) - \Omega \cdot \cos(\varphi)}{\Gamma^2 + \Omega^2}.$$

Оба равенства справедливы для любого момента времени и, следовательно, для любой фазы  $\varphi$ . В таком случае можно приравнять коэффициенты при косинусе  $\varphi$  и при синусе  $\varphi$  этих двух выражений для  $P_{V_z}$ .

Тогда с учетом  $R = \frac{p\varepsilon_0}{\hbar}$  получим

$$\begin{cases} \chi'_{V_z} = -\frac{p^2 N_{0V_z} (\rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z))}{\hbar} \cdot \frac{\Omega}{\Gamma^2 + \Omega^2} \\ \chi''_{V_z} = \frac{p^2 N_{0V_z} (\rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z))}{\hbar} \cdot \frac{\Gamma}{\Gamma^2 + \Omega^2} \end{cases}.$$

Здесь

$$\begin{cases} \rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z) = (\rho_{11}^0 - \rho_{22}^0) \cdot \left( 1 - \frac{G}{1+G} \cdot \mathcal{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma\sqrt{1+G}}\right) \right) \\ G = \frac{R^2}{2\Gamma} \left( \frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} \right) \\ R = \frac{p\varepsilon_0}{\hbar} \\ \Omega = \omega - kV_z - \omega_{21} \end{cases}.$$

Следующее равенство

$$P = P_c \cos(\varphi) + P_s \sin(\varphi)$$

является определением синфазной  $P_c$  и квадратурной  $P_s$  амплитуд поляризации среды. Тогда с учетом равенства  $P = \varepsilon_0 (\chi' \cos(\varphi) + \chi'' \sin(\varphi))$  следует

$$\begin{cases} P_c = \chi' \varepsilon_0 \\ P_s = \chi'' \varepsilon_0 \end{cases}.$$

### **Обратное воздействие среды на волну. Дифференциальные уравнения для амплитуды поля или укороченные волновые уравнения.**

Излучение диполей среды изменяет проходящую мимо световую волну. Это изменение проявляется в поглощении света и изменении скорости распространения света в среде. Изменения в проходящей световой волне возникают в результате интерференции света переизлученного диполями молекул и проходящей мимо световой волны. В этом и состоит обратное воздействие среды на волну.

Вместо сложения волн излучения диполей изменение световой волны в среде можно вывести из системы уравнений Максвелла. Что мы и сделаем.

Рассмотрим систему уравнений Максвелла

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\vec{D}) = 4\pi\rho \\ \operatorname{rot}(\vec{E}) = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div}(\vec{B}) = 0 \\ \operatorname{rot}(\vec{H}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right.$$

без свободных зарядов  $\rho = 0$  и без токов проводимости  $\vec{j} = 0$ .

Тогда получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\vec{D}) = 0 \\ \operatorname{rot}(\vec{E}) = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div}(\vec{B}) = 0 \\ \operatorname{rot}(\vec{H}) = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right. .$$

Рассмотрим два выражения для ротора ротора  $\vec{E}$ .

С одной стороны, возьмем ротор от второго уравнения и подставим в правую часть вместо ротора  $\vec{B}$  выражение для ротора  $\vec{H}$  из четвертого уравнения. Напомним, что в оптике  $\mu = 1$  и  $\vec{B} = \vec{H}$ . Тогда получим

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{E})) = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot}(\vec{B}) = -\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2}.$$

А с другой стороны по правилу "бац минус цап":

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{E})) = [\vec{\nabla}, [\vec{\nabla}, \vec{E}]] = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}, \vec{E}) - \vec{E}(\vec{\nabla}, \vec{\nabla}).$$

Здесь  $(\vec{\nabla}, \vec{E}) = \operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}(\vec{D}) = \frac{4\pi\rho}{\varepsilon} = 0$ , тогда

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{E})) = -\vec{E}(\vec{\nabla}, \vec{\nabla}) = -\Delta \vec{E}.$$

Объединяя оба выражения для  $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{E}))$ , получим:

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} = 0 \quad (4.1)$$

-----  
Если подставить  $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$  в уравнение (4.1), то получим волновое уравнение для поля  $\vec{E}$ :

$$\Delta \vec{E} - \frac{\varepsilon}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (4.2)$$

Сравнивая уравнение (4.2) с определением волнового уравнения в математике:

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{V^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0,$$

получим величину фазовой скорости световых волн  $V = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$ . Сравнивая величину скорости с определением показателя преломления  $V = \frac{c}{n}$ , получаем

$$n = \sqrt{\varepsilon}, \text{ точнее } n = \sqrt{\varepsilon\mu}, \text{ но в оптике } \mu \approx 1.$$

$$\text{Тогда } \varepsilon = n^2 \quad \Rightarrow \quad \vec{D} = n^2 \vec{E}$$

-----  
 Векторы  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  можно связать друг с другом и несколько иначе:

$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$ , где  $\vec{P}$  — поляризация среды или объемная плотность дипольного момента, осциллирующая на световой частоте.

Разобьем поляризацию на два слагаемых  $\vec{P} = \vec{P}_{\text{нерез}} + \vec{P}_{\text{рез}}$ :

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}_{\text{нерез}} + 4\pi\vec{P}_{\text{рез}}.$$

Здесь  $\vec{P}_{\text{рез}}$  — резонансный вклад в поляризацию или вклад двух уровней энергии, связанных переходом близким по частоте к частоте света;  $\vec{P}_{\text{нерез}}$  — нерезонансный вклад в поляризацию среды от остальных переходов.

По аналогии с формулой  $\vec{D} = n^2 \vec{E}$  запишем  $\vec{E} + 4\pi\vec{P}_{\text{нерез}} = n_0^2 \vec{E}$ , где  $n_0$  — показатель преломления среды вдали от рассматриваемой линии поглощения. Тогда

$$\vec{D} = n_0^2 \vec{E} + 4\pi\vec{P}_{\text{рез}}.$$

Чтобы не тянуть за собой во всех формулах нижний индекс у поляризации будем во всех последующих формулах вместо  $\vec{P}_{\text{рез}}$  писать просто  $\vec{P}$ , подразумевая под  $\vec{P}$  вклад в поляризацию только от рассматриваемого перехода среды.

-----  
 Подставим  $\vec{D} = n_0^2 \vec{E} + 4\pi\vec{P}$  в уравнение (4.1), заменим  $\vec{P}_{\text{рез}}$  на  $\vec{P}$  и получим

$$\Delta \vec{E} - \frac{n_0^2}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} \quad (4.3)$$

Это — уравнение Даламбера или волновое уравнение с источниками поля.

Далее из этого уравнения мы хотим получить дифференциальное уравнение для амплитуды светового поля через амплитуду поляризации. Эти уравнения для амплитуд и называются укороченными волновыми уравнениями.

Будем рассматривать уравнение (4.3) для комплексных  $\vec{E}$  и  $\vec{P}$ . Для линейного уравнения с вещественными коэффициентами вещественная часть комплексного решения является вещественным решением.

Рассмотрим световую волну, распространяющуюся вдоль оси  $z$ , и линейно поляризованную вдоль оси  $y$ . Тогда  $\vec{P} \parallel \vec{E} \parallel \vec{e}_y$ . Для краткости записи отбросим векторные обозначения, и будем рассматривать только проекции векторов на ось  $y$ .

Чтобы отличать комплексные величины от вещественных величин будем писать волну над комплексными величинами.

$$E = \text{Re}(\tilde{E}) \text{ и } P = \text{Re}(\tilde{P}).$$

Перепишем уравнение (4.3) для комплексных величин:

$$\Delta \tilde{E} - \frac{n_0^2}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial t^2} \quad (4.4)$$

Будем искать решение в виде

$\tilde{E} = \tilde{E}_0(t, z) \cdot e^{-i\varphi}$ , где ось  $z$  направлена вдоль направления распространения световой волны  $\varphi = \omega t - k_0 z - \varphi_0$  — фаза световой волны и будем рассматривать фазу, как фазу волны распространяющейся с фазовой скоростью  $\frac{c}{n_0}$ , а не со скоростью  $\frac{c}{n}$ , как на самом деле. Соответственно

$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{2\pi\nu}{\lambda_0\nu} = \frac{\omega}{\frac{c}{n_0}} = \frac{n_0\omega}{c} \text{ — нерезонансное волновое число вместо } k = \frac{n\omega}{c}.$$

Несоответствие  $k_0$  настоящему  $k$  спрятано в зависимости амплитуды света  $\tilde{E}_0$  от  $z$  координаты.

Аналогично будем считать

$$\tilde{P} = \tilde{P}_0(t, z) \cdot e^{-i\varphi}, \text{ где } \varphi = \omega t - k_0 z - \varphi_0.$$

Получим теперь из уравнения (4.4) связь комплексных амплитуд  $\tilde{E}_0$  и  $\tilde{P}_0$ .

В уравнение надо подставить вторые производные, для которых введем более компактные обозначения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial z^2} \equiv \tilde{E}'' \\ \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial t^2} \equiv \ddot{\tilde{E}} \\ \frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial t^2} \equiv \ddot{\tilde{P}} \end{array} \right.$$

Выразим эти производные через амплитуды поля и поляризации и подставим в уравнение (4.4).

Дифференцируя по  $z$  выражение  $\tilde{E} = \tilde{E}_0(t, z) \cdot e^{-i\varphi}$ , получим  $\tilde{E}' = \tilde{E}_0' e^{-i\varphi} + ik_0 \tilde{E}_0 e^{-i\varphi}$ . Тогда

$$\tilde{E}'' = \tilde{E}_0'' e^{-i\varphi} + 2ik_0 \tilde{E}_0' e^{-i\varphi} - k_0^2 \tilde{E}_0 e^{-i\varphi}.$$

Аналогично:

$$\ddot{\tilde{E}} = \ddot{\tilde{E}}_0 e^{-i\varphi} - 2i\omega \dot{\tilde{E}}_0 e^{-i\varphi} - \omega^2 \tilde{E}_0 e^{-i\varphi}$$

и

$$\ddot{\tilde{P}} = \ddot{\tilde{P}}_0 e^{-i\varphi} - 2i\omega \dot{\tilde{P}}_0 e^{-i\varphi} - \omega^2 \tilde{P}_0 e^{-i\varphi}.$$

Подставим все три выражения в уравнение (4.4), в котором  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ , так

как световая волна распространяется вдоль оси  $z$ , поэтому нет зависимости от координат  $x$  и  $y$  и вторые производные по ним равны нулю. После подстановки производных в уравнение (4.4) сократим это уравнение на  $e^{-i\varphi}$  и получим:

$$\tilde{E}_0'' + 2ik_0 \tilde{E}_0' - k_0^2 \tilde{E}_0 - \frac{n_0^2}{c^2} \ddot{\tilde{E}}_0 + \frac{n_0^2}{c^2} 2i\omega \dot{\tilde{E}}_0 + \frac{n_0^2}{c^2} \omega^2 \tilde{E}_0 = \frac{4\pi}{c^2} \ddot{\tilde{P}}_0 - \frac{8\pi i\omega}{c^2} \dot{\tilde{P}}_0 - \frac{4\pi}{c^2} \omega^2 \tilde{P}_0 \quad (4.5)$$

Слагаемые  $-k_0^2 \tilde{E}_0$  и  $+\frac{n_0^2}{c^2} \omega^2 \tilde{E}_0$  в сумме равны нулю, так как  $k_0 = \frac{n_0 \omega}{c}$ .

Сократим эти два слагаемых в уравнении (4.5).

Амплитуды  $\tilde{E}_0$  и  $\tilde{P}_0$  — медленные функции координат и времени. Тогда высокими производными от амплитуд можно пренебречь по сравнению с низкими производными. Оставим в уравнении (4.5) только наибольшие слагаемые  $\dot{\tilde{P}}_0$ ,  $\dot{\tilde{E}}_0$ ,  $\tilde{E}_0'$  для амплитуд  $\tilde{E}_0$  и  $\tilde{P}_0$ , отбросим более высокие производные и получим:

$$2ik_0 \tilde{E}_0' + 2i \frac{n_0^2}{c^2} \omega \dot{\tilde{E}}_0 = -\frac{4\pi}{c^2} \omega^2 \tilde{P}_0 \quad | \cdot \frac{1}{2ik_0} \Rightarrow$$

$$\tilde{E}_0' + \frac{n_0}{c} \dot{\tilde{E}}_0 = 2\pi i \frac{\omega}{n_0 c} \tilde{P}_0 \quad (4.6)$$

Это и есть укороченное волновое уравнение или уравнение для комплексных амплитуд поля и поляризации.

Получим другую форму уравнения.

Рассмотрим выражение для дифференциала комплексной амплитуды светового поля  $\tilde{E}_0$ , как функции координаты  $z$  и времени  $t$ :

$$d\tilde{E}_0 = \frac{\partial \tilde{E}_0}{\partial z} dz + \frac{\partial \tilde{E}_0}{\partial t} dt = \tilde{E}_0' dz + \dot{\tilde{E}}_0 dt$$

Разделим это равенство на дифференциал координаты  $dz$  и получим:

$$\frac{d\tilde{E}_0}{dz} = \tilde{E}_0' + \frac{dt}{dz} \cdot \dot{\tilde{E}}_0.$$

Пусть  $\frac{dz}{dt} = \frac{c}{n_0}$ , тогда

$$\frac{d\tilde{E}_0}{dz} = \tilde{E}_0' + \frac{n_0}{c} \dot{\tilde{E}}_0 \quad (4.7)$$

Это совпадает с левой частью уравнения (4.6).

Какой смысл приравнивания  $\frac{dz}{dt} = \frac{c}{n_0}$ ?

При этом условии мы берем производную  $\frac{d\tilde{E}_0}{dz}$ , как бы сидя верхом на гребне световой волны, которая распространяется со скоростью  $\frac{c}{n_0}$ . Это так называемая полная производная, она аналогична, например, производной  $\frac{d\rho_{11}}{dt}$  в рассмотренных ранее уравнениях для матрицы плотности, где  $\frac{d\rho_{11}}{dt}$  — полная производная в системе отсчета атома или как бы сидя верхом на атоме.

Выражение  $\frac{d\tilde{E}_0}{dz}$  — производная, которая показывает, что происходит с амплитудой световой волны по мере распространения волны вдоль оси  $z$ .

Подставим (4.7) в (4.6) и получим

$$\frac{d\tilde{E}_0}{dz} = 2\pi i \frac{\omega}{n_0 c} \tilde{P}_0 \quad (4.8)$$

Это то же самое укороченное волновое уравнение, что и (4.6), но в другой форме.

Получим теперь аналоги комплексных уравнений (4.6) и (4.8) в вещественном виде.

Вместо одной комплексной амплитуды  $\tilde{P}_0$  рассмотрим две вещественные амплитуды  $P_c$  и  $P_s$ . Здесь  $P_c$  — синфазная по отношению к световому полю амплитуда, а  $P_s$  — квадратурная амплитуда поляризации, сдвинутая по фазе на  $\frac{\pi}{2}$  относительно фазы светового поля.

$P = P_c \cos(\varphi) + P_s \sin(\varphi) = \text{Re}\left((P_c + iP_s) \cdot e^{-i\varphi}\right)$ , тогда комплексная амплитуда поляризации выражается через две вещественные амплитуды следующим образом:

$$\tilde{P}_0 = P_c + iP_s.$$

Аналогичное выражение получаем для напряженности светового поля:



$$\tilde{E}_0 = E_c + iE_s.$$

Подставим эти выражения в уравнения (4.6) и (4.8). В каждом из полученных комплексных уравнений можно приравнять друг другу вещественные части и мнимые части. В результате получим укороченные волновые уравнения в вещественном виде:

$$\begin{cases} E'_c + \frac{n_0}{c} \dot{E}_c = -2\pi \frac{\omega}{n_0 c} P_s \\ E'_s + \frac{n_0}{c} \dot{E}_s = +2\pi \frac{\omega}{n_0 c} P_c \end{cases} \text{ из уравнения (4.6) и}$$

$$\begin{cases} \frac{dE_c}{dz} = -\frac{2\pi\omega}{n_0 c} P_s \\ \frac{dE_s}{dz} = +\frac{2\pi\omega}{n_0 c} P_c \end{cases} \text{ из уравнения (4.8).}$$

Рассмотрим частный случай применения укороченных волновых уравнений для прохождения света через оптически тонкий слой среды толщиной  $\Delta z$ .

$\tilde{E}_{0_{\text{вых}}} = \tilde{E}_{0_{\text{вх}}} + \frac{d\tilde{E}_0}{dz} \Delta z$ , где  $\tilde{E}_{0_{\text{вых}}}$  — амплитуда света на выходе из среды,  $\tilde{E}_{0_{\text{вх}}}$  — амплитуда на входе.

На входе  $\begin{cases} E_c = \mathcal{E}_0 \\ E_s = 0 \end{cases}$ , тогда

$$\begin{cases} E_{c_{\text{вых}}} = \mathcal{E}_0 - \frac{2\pi\omega}{n_0 c} P_s \cdot \Delta z \\ E_{s_{\text{вых}}} = \frac{2\pi\omega}{n_0 c} P_c \cdot \Delta z \end{cases} \text{ — световое поле на выходе из слоя среды,}$$

где

$$\begin{cases} P_c = \int P_{c_{V_z}} dV_z = \mathcal{E}_0 \int \chi'_{V_z} dV_z \\ P_s = \int P_{s_{V_z}} dV_z = \mathcal{E}_0 \int \chi''_{V_z} dV_z \end{cases},$$

и в свою очередь

$$\begin{cases} \chi'_{V_z} = -\frac{p^2 \cdot N_{0_{V_z}} \cdot (\rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z))}{\hbar} \cdot \frac{\Omega}{\Gamma^2 + \Omega^2}, \\ \chi''_{V_z} = +\frac{p^2 \cdot N_{0_{V_z}} \cdot (\rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z))}{\hbar} \cdot \frac{\Gamma}{\Gamma^2 + \Omega^2}, \end{cases}$$

как это было показано в вопросе о поляризации среды.

Здесь

$p = \int \psi_1^* \cdot (\vec{p}, \vec{e}) \cdot \psi_2 \cdot dV$  — недиагональный матричный элемент проекции дипольного момента перехода на единичный вектор поляризации световой волны.

$N_0(V_z) = \frac{N_0}{\sqrt{\pi}U} \cdot e^{-\frac{V_z^2}{U^2}}$  — распределение концентрации по лучевой скорости молекул.

$U = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}$  — наиболее вероятная скорость молекул газа при температуре  $T$ ,  $k_B$  — постоянная Больцмана.

$$\rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z) = (\rho_{11}^0 - \rho_{22}^0) \cdot \left( 1 - \frac{G}{1+G} \cdot \mathcal{L} \left( \frac{\Omega}{\Gamma \sqrt{1+G}} \right) \right), \text{ где}$$

$$G \equiv \frac{R^2}{2\Gamma} \cdot \left( \frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} \right) \text{ — фактор насыщения, } R = \frac{p\epsilon_0}{\hbar} \text{ — частота Раби,}$$

$\Omega = \omega - kV_z - \omega_{21}$  — расстройка частоты света в системе отсчета атома относительно частоты перехода.

**Показатель преломления и коэффициент поглощения среды.**

$$\begin{cases} \tilde{P} = \tilde{\chi} \cdot \tilde{E} \\ \tilde{P} = \tilde{P}_0 \cdot e^{-i\varphi} \\ \tilde{E} = \tilde{E}_0 \cdot e^{-i\varphi} \end{cases} \Rightarrow$$

$\tilde{P}_0 = \tilde{\chi} \cdot \tilde{E}_0$  — комплексная восприимчивость  $\tilde{\chi}$  является не только коэффициентом пропорциональности между комплексной поляризацией  $\tilde{P}$  и комплексной напряженностью световой волны  $\tilde{E}$ , но и является коэффициентом пропорциональности между амплитудами комплексной поляризации и комплексной напряженности световой волны.

Подставим  $\tilde{P}_0 = \tilde{\chi} \cdot \tilde{E}_0$  в укороченное волновое уравнение

$$\frac{d\tilde{E}_0}{dz} = 2\pi i \frac{\omega}{n_0 c} \tilde{P}_0 \text{ и получим}$$

$$\frac{d\tilde{E}_0}{dz} = 2\pi i \frac{\omega}{n_0 c} \tilde{\chi} \tilde{E}_0.$$

Решение этого дифференциального уравнения — экспонента:

$$\tilde{E}_0(z) = \epsilon_0 e^{2\pi i \frac{\omega}{n_0 c} \tilde{\chi} z} = \epsilon_0 e^{2\pi i \frac{\omega}{n_0 c} \chi' z} e^{-2\pi \frac{\omega}{n_0 c} \chi'' z}.$$

Сравним это решение с ожидаемым выражением:

$$\tilde{E}_0(z) = \varepsilon_0 e^{i(k-k_0)z} e^{-\frac{\aleph}{2}z}.$$

Обсудим, почему это выражение ожидаемое.

Сомножитель  $e^{-\frac{\aleph}{2}z}$  связан с определением коэффициента поглощения  $\aleph$  через интенсивность света  $I$ :

$$\begin{cases} I = I_0 e^{-\aleph z} \\ I \sim E_0^2 \end{cases} \Rightarrow E_0 \sim e^{-\frac{\aleph}{2}z}.$$

Сомножитель  $e^{i(k-k_0)z}$  в выражении для  $\tilde{E}_0(z)$  связан с тем, что реальная скорость света в среде  $\frac{c}{n}$  заменена нами при выводе укороченных волновых уравнений скоростью  $\frac{c}{n_0}$ , что соответствует замене  $k = \frac{n\omega}{c}$  на  $k_0 = \frac{n_0\omega}{c}$ .

Вместо  $\tilde{E} = \varepsilon_0 e^{-i(\omega t - kz - \varphi_0)}$  мы при выводе укороченных волновых уравнений использовали формулу

$$\tilde{E} = \tilde{E}_0 e^{-i(\omega t - kz - \varphi_0)} = \varepsilon_0 e^{i(k-k_0)z} e^{-i(\omega t - k_0 z - \varphi_0)}.$$

Сравнивая две части правого равенства получим, что

$$\tilde{E}_0 \sim e^{i(k-k_0)z}.$$

Тогда, сравнивая два выражения для  $\tilde{E}_0(z)$

$$\begin{cases} \tilde{E}_0(z) = \varepsilon_0 e^{2\pi i \frac{\omega}{n_0 c} \chi' z} e^{-2\pi \frac{\omega}{n_0 c} \chi'' z} \\ \tilde{E}_0(z) = \varepsilon_0 e^{i(k-k_0)z} e^{-\frac{\aleph}{2}z} \end{cases}, \text{ получим:}$$

$$\begin{cases} k - k_0 = \frac{2\pi\omega}{n_0 c} \chi' \\ \aleph = \frac{4\pi\omega}{n_0 c} \chi'' \end{cases}.$$

С учетом  $n = k \frac{c}{\omega}$  первое уравнение можно изменить, тогда

$$\begin{cases} n - n_0 = \frac{2\pi}{n_0} \chi' \\ \aleph = \frac{4\pi\omega}{n_0 c} \chi'' \end{cases}, \text{ где } \begin{cases} \chi' = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi'_{V_z} dV_z \\ \chi'' = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi''_{V_z} dV_z \end{cases} \text{ и}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi'_{V_z} = -\frac{p^2 N_{0V_z} (\rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z))}{\hbar} \cdot \frac{\Omega}{\Gamma^2 + \Omega^2}, \\ \chi''_{V_z} = +\frac{p^2 N_{0V_z} (\rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z))}{\hbar} \cdot \frac{\Gamma}{\Gamma^2 + \Omega^2} \end{array} \right., \text{ где } \Omega = \omega - kV_z - \omega_{21},$$

$$\rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z) = (\rho_{11}^0 - \rho_{22}^0) \cdot \left( 1 - \frac{G}{1+G} \cdot \mathcal{L} \left( \frac{\Omega}{\Gamma \sqrt{1+G}} \right) \right), \text{ где}$$

$$G \equiv \frac{R^2}{2\Gamma} \cdot \left( \frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} \right) \text{ — фактор насыщения, } R = \frac{p\mathcal{E}_0}{\hbar} \text{ — частота Раби,}$$