

## Экзамен. Дифракция рентгеновских лучей на кристалле. Лауэграммы.

При упругом рассеянии или дифракции рентгеновских лучей каждый рентгеновский квант рассеивается не на конкретном электроне, а сразу на всем кристалле. Кристалл тяжелый по сравнению с одним электроном, поэтому отдача, которую испытывает кристалл, передает ему очень малую энергию  $\frac{p^2}{2M}$ , где  $p$  изменение импульса рентгеновского фотона,  $M$  — масса кристалла. Поэтому энергия рентгеновского фотона при рассеянии фотона всем кристаллом почти не изменяется.

Кристаллом рассеивается электромагнитная волна, а правильная периодическая структура кристалла при этом играет роль дифракционной решетки. Электромагнитная волна рассеивается, как волна вероятности поймать рассеянный рентгеновский квант. Вероятность поймать квант в любой точке пространства пропорциональна квадрату модуля комплексной амплитуды рассеянной волны или пропорциональна интенсивности рассеянной волны.

Свет видимого диапазона имеет большую длину волны и на кристалле не рассеивается, так как дифракционные максимумы решетки появляются только в том случае, если шаг решетки больше половины длины волны света  $d > \frac{\lambda}{2}$ .

Пусть на кристалл падает параллельный пучок монохроматических рентгеновских лучей, которому соответствует плоская монохроматическая волна.

-----

Кристалл состоит из повторяющихся в правильном порядке узлов. В простейшем случае узел кристалла содержит один атом, но узел может содержать и несколько атомов, например, разных элементов периодической системы Менделеева. Расстояние между этими атомами одного порядка с расстоянием между соседними узлами кристалла. Излучение рассеянное разными узлами в направлении дифракционного максимума должно быть синфазно.

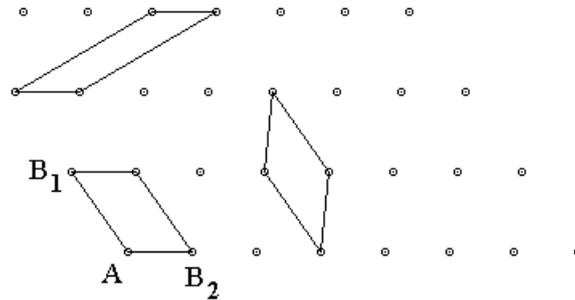
Кристалл — это правильная периодическая структура. В одномерном случае период один, а в трехмерном случае — три периода. То есть в кристалле есть три необязательно ортогональных направления не лежащих в одной плоскости, и в этих трех направлениях есть три разных периода.

Следовательно, независимо от структуры кристалла его всегда можно представить, как повторяющиеся так называемые примитивные ячейки в виде одинаковых параллелепипедов. В каждой вершине параллелепипеда находятся узлы кристалла.

И действительно, мысленно проведем из одного узла кристалла векторы к трем другим узлам вдоль трех периодов кристалла. На этих трех векторах можно построить параллелепипед. Если внутри параллелепипеда не будет ни одного узла, то этот параллелепипед и будет примитивной ячейкой кристалла.

Для начала проще представить структуру кристалла в двумерном случае. Тогда ячейки кристалла будут одинаковыми параллелограммами.

Примитивную ячейку кристалла можно выбрать разными способами, что видно из нижеследующего рисунка.



На рисунке приведены возможные варианты примитивных ячеек для одного и того же двумерного кристалла.

Для синфазности света рассеянного всеми узлами кристалла необходимо и достаточно, чтобы были синфазны волны, рассеянные всеми узлами одной примитивной ячейки кристалла.

На примере одной из ячеек видно, что для синфазности волн, рассеянных всеми узлами одной ячейки, необходимо и достаточно, чтобы синфазными были волны рассеянные узлами  $A, B_1, B_2$ , которые расположены на двух сторонах  $AB_1$  и  $AB_2$ , выходящих из одного узла  $A$ .

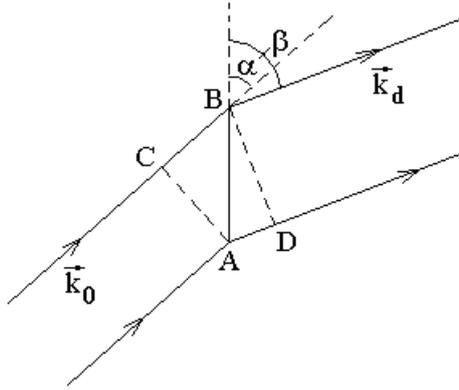
Аналогично в трехмерном случае нужно чтобы были синфазны волны рассеянные узлами  $A, B_1, B_2, B_3$ , расположенными на трех ребрах  $AB_1, AB_2, AB_3$ .

Рассмотрим, в каком случае рассеяние узлами  $A, B_1, B_2, B_3$  будет синфазно.

Введем обозначение: 
$$\begin{cases} \vec{d}_1 \equiv \overline{AB_1} \\ \vec{d}_2 \equiv \overline{AB_2} \\ \vec{d}_3 \equiv \overline{AB_3} \end{cases}$$

Пусть  $\vec{k}_0$  — волновой вектор падающей на кристалл рентгеновской волны,  $\vec{k}_d$  — волновой вектор упруго рассеянной волны или дифрагированной волны.

Рассмотрим рассеяние в направлении  $\vec{k}_d$  на двух узлах, которые связаны вектором  $\vec{d} = \overline{AB}$ . Векторы  $\vec{k}_0, \vec{d}$  и  $\vec{k}_d$  не обязательно лежат в одной плоскости.



Проведем через узел  $A$  перпендикуляр к падающей волне  $\vec{k}_0$  до луча, идущего в узел  $B$ , и получим точку  $C$ . Проведем через узел  $B$  перпендикуляр к рассеянному лучу  $\vec{k}_d$  до луча, рассеянного узлом  $A$ , и получим точку  $D$ .

Обозначим углы:  $\alpha \equiv (\widehat{\vec{k}_0, \vec{d}})$  — угол между лучом падающей волны  $\vec{k}_0$  и ребром примитивной ячейки кристалла  $\vec{d}$ ,  $\beta \equiv (\widehat{\vec{k}_d, \vec{d}})$  — угол между рассеянным лучом  $\vec{k}_d$  и ребром  $\vec{d}$ .

Разность хода лучей рассеянных на узлах  $A$  и  $B$  равна:

$$\Delta = BC - AD = AB \cdot \cos(\alpha) - AB \cdot \cos(\beta) = (\cos(\alpha) - \cos(\beta)) \cdot d.$$

Синфазность рассеянных узлами  $A$  и  $B$  волн означает, что разность хода кратна длине волны:

$$\Delta = m\lambda \quad \Rightarrow \quad (\cos(\alpha) - \cos(\beta)) \cdot d = m\lambda,$$

где  $m$  — целое число.

Для трех ребер примитивной ячейки кристалла получим три уравнения:

$$\begin{cases} (\cos(\alpha_1) - \cos(\beta_1)) \cdot d_1 = m_1\lambda \\ (\cos(\alpha_2) - \cos(\beta_2)) \cdot d_2 = m_2\lambda \\ (\cos(\alpha_3) - \cos(\beta_3)) \cdot d_3 = m_3\lambda \end{cases}$$

Здесь  $d_1, d_2, d_3$  — длины ребер примитивной ячейки кристалла;  $m_1, m_2, m_3$  — целые числа;

$$\alpha_i \equiv (\widehat{\vec{k}_0, \vec{d}_i});$$

$$\beta_i \equiv (\widehat{\vec{k}_d, \vec{d}_i}).$$

Мы получили систему из трех уравнений для трех неизвестных углов  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ , которые задают направление дифракции рентгеновских лучей. Однако, чтобы задать направление, достаточно двух углов, а не трех. Вспомним, например, сферические координаты. Следовательно, три угла

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ , определяющие направление дифракции не являются независимыми переменными.

И действительно, задание углов  $\beta_1$  и  $\beta_2$  оставляет только два возможных значения для угла  $\beta_3$ . Это видно, если рассмотреть пересечение двух конусов с вершинами в точке  $A$ , построенных вокруг векторов  $\overline{AB_1} = \vec{d}_1$  и  $\overline{AB_2} = \vec{d}_2$  с угловыми радиусами  $\beta_1$  и  $\beta_2$ . Вектор  $\vec{k}_d$  должен находиться на поверхности каждого из двух конусов. Линии пересечения конусов — это и есть два варианта направления  $\vec{k}_d$ , которым соответствуют два угла  $\beta_3$ .

$$\text{Три уравнения } \begin{cases} (\cos(\alpha_1) - \cos(\beta_1)) \cdot d_1 = m_1 \lambda \\ (\cos(\alpha_2) - \cos(\beta_2)) \cdot d_2 = m_2 \lambda \\ (\cos(\alpha_3) - \cos(\beta_3)) \cdot d_3 = m_3 \lambda \end{cases} \text{ нужно рассматривать, как}$$

систему относительно трех неизвестных, но эти неизвестные не три угла  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ . Эти неизвестные  $\beta_1, \beta_2, \lambda$ .

Если кристалл освещать монохроматическим рентгеновским излучением с заданной длиной волны  $\lambda$ , то дифракционных максимумов может не быть вовсе, если окажется, что  $\lambda$  из решения системы не совпадает с  $\lambda$  излучения. Дифракционные максимумы появляются только для некоторых значений длин волн  $\lambda$ .

При облучении кристалла рентгеновским излучением со сплошным спектром кристалл сам выберет длины волн, для которых возможны дифракционные максимумы. В разные дифракционные максимумы пойдет излучение с разными длинами волн.

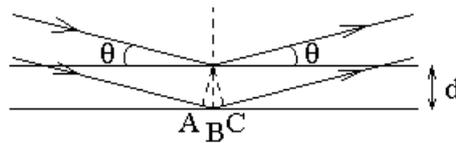
Картина дифракционных максимумов — это и есть лауэграмма.

Обычно для получения лауэграммы берут маленький кристалл, например, размером один миллиметр. Кристалл ставят в рентгеновский пучок лучей, а за кристаллом на расстоянии гораздо больше одного миллиметра ставят фотопластинку. Изображение на фотопластинке и будет лауэграммой.

### **Экзамен. Условие Вульфа-Брэгга для дифракции монохроматических рентгеновских лучей на поликристаллическом порошке.**

Если для получения лауэграмм используется рентгеновское излучение со сплошным спектром, то в данном случае рассматривается дифракция монохроматического излучения. Вместо всех возможных длин волн в данном случае используются все возможные ориентации крупинки кристалла в порошке относительно направления падающей волны.

Согласно Вульфу и Брэггу, если излучение зеркально отраженное от двух соседних плоскостей узлов кристалла синфазно, то в этом направлении будет дифракционный максимум.



На рисунке изображены две горизонтальные параллельные плоскости узлов,  $d$  — расстояние между плоскостями,  $\theta$  — угол скольжения падающего излучения.

Разность хода лучей отраженных от двух плоскостей равна

$$\Delta = AB + BC = 2d \cdot \sin(\theta).$$

Условие синфазности отраженных волн

$$\Delta = m\lambda,$$

где  $m$  — целое число.

Объединяя оба равенства, получим

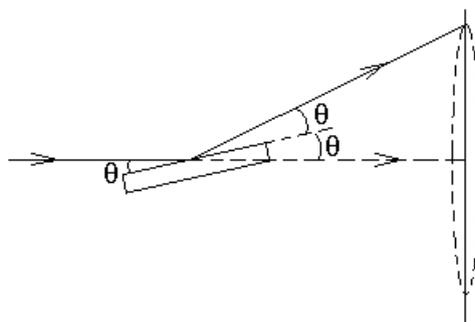
$$2d \cdot \sin(\theta) = m\lambda \text{ — это и есть условие Вульфа-Брэгга.}$$

Здесь  $m$  — целое число,  $d$  — межплоскостное расстояние,  $\theta$  — угол скольжения.

Эксперимент ставится следующим образом.

На небольшой образец поликристаллического порошка направляют монохроматический параллельный рентгеновский пучок лучей. За порошком перпендикулярно падающему лучу ставят фотопластинку на расстоянии гораздо большем диаметра пучка лучей и размеров поликристаллического образца.

Схема опыта имеет осевую симметрию. Следовательно, дифракционная картина также будет иметь осевую симметрию. Дифракционная картина — концентрические кольца. Как видно из нижеследующего рисунка, угловой радиус кольца равен  $2\theta$ .



#### Факультативная вставка.

Рассмотрим, как условие Вульфа-Брэгга соотносится с условием Лауэ.

Покажем, что условие Вульфа-Брэгга достаточно для выполнения условия Лауэ:

$$(В-Б) \Rightarrow (Л).$$

Рассмотрим примитивную ячейку кристалла, как это делает Лауэ. Рассмотрим плоскость узлов, которая является продолжением одной из граней

примитивной ячейки. В качестве параллельной плоскости узлов рассмотрим плоскость второй параллельной грани примитивной ячейки.

Лучи, зеркально отражающиеся от плоскости, всегда отражаются синфазно, поэтому плоское зеркало и отражает зеркально. Выберем ребра  $\overline{AB_1} = \vec{d}_1$  и  $\overline{AB_2} = \vec{d}_2$  в первой плоскости узлов. Тогда при выполнении условия Вульфа-Брэгга излучение, рассеянное узлами  $A, B_1, B_2$ , будет синфазно, так как эти узлы лежат в первой плоскости узлов, и все точки этой плоскости излучают синфазно в направлении зеркального отражения от плоскости.

Если по условию Вульфа-Брэгга от второй плоскости узлов излучение отражается синфазно излучению, отраженному от первой плоскости, то каждая точка второй плоскости излучает в направлении зеркального отражения синфазно каждой точки первой плоскости. Узел  $B_3$  по построению лежит во второй плоскости узлов, следовательно, рассеянное им излучение в направлении зеркального отражения от плоскости синфазно рассеянному излучению в этом направлении узлами  $A, B_1, B_2$ .

Таким образом, мы показали, что при выполнении условия Вульфа-Брэгга автоматически выполняются условия Лауэ.

-----

Обратное несправедливо.

Дифракционные максимумы Лауэ, заведомо не отвечают условию Вульфа-Брэгга, если направление дифракции не лежит в плоскости падения ни для одной из граней примитивной ячейки кристалла.

При вращении кристаллической крупинки вокруг падающего луча дифракционный максимум Лауэ формирует на фотопластинке дифракционное кольцо. Однако четко видны только те кольца, которые отвечают условию Вульфа-Брэгга.

-----

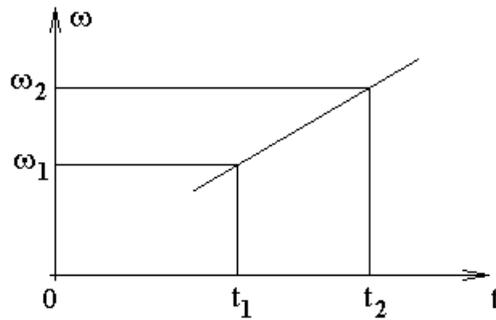
Если направление дифракции удовлетворяет условию Вульфа-Брэгга, то при поворотах кристаллической крупинки вокруг оси перпендикулярной плоскости узлов кристалла условие Вульфа-Брэгга сохраняется.

Если же направление дифракции Лауэ не удовлетворяет условию Вульфа-Брэгга, то направление дифракции не лежит в плоскости падения луча на плоскость узлов кристалла. В таком случае при поворотах кристаллической крупинки вокруг оси перпендикулярной плоскости узлов кристалла направление дифракционного максимума не сохраняется. Поэтому соответствующие кольца на фотопластинке имеют очень малую интенсивность.

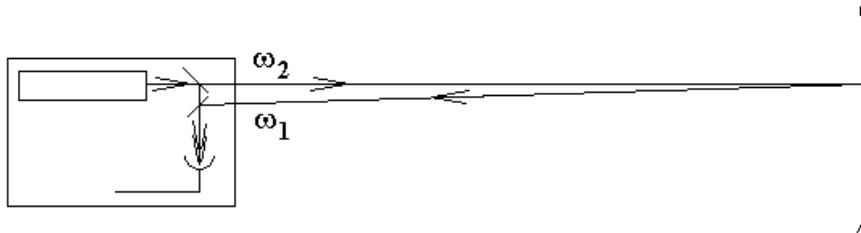
Конец факультативной вставки.

### **Лазерный дальномер.**

Рассмотрим лазер, частота излучения которого линейно нарастает во времени.



Излучение лазера проходит неизвестный путь  $L$ , рассеивается поверхностью, до которой измеряют расстояние, проходит путь  $L$  в обратном направлении. Это излучение заставляют интерферировать на приемнике с излучением, которое попадает на приемник сразу из лазера.



Пусть в некоторый момент времени  $t_2$  к приемнику возвращается рассеянное излучение с частотой  $\omega_1$ , которое было излучено лазером в более ранний момент времени  $t_1$ . В момент времени  $t_2$  лазер излучает большую частоту  $\omega_2$ . В результате интерференции двух волн в приемнике излучения формируется фототок с разностной частотой  $(\omega_2 - \omega_1)$ . Если точно знать скорость изменения частоты генерации лазера  $\frac{d\omega}{dt}$ , то по величине разностной частоты  $(\omega_2 - \omega_1)$  можно рассчитать время распространения лазерного излучения до объекта рассеивающего свет и обратно  $t_2 - t_1 = \frac{(\omega_2 - \omega_1)}{\frac{d\omega}{dt}}$ . А

через время распространения можно рассчитать расстояние до рассеивающего свет объекта  $L = c \frac{t_2 - t_1}{2}$ .

### Экзамен. Эффект Фарадея.

Пусть свет распространяется в среде вдоль магнитного поля. Эффект Фарадея состоит в том, что плоскость поляризации света поворачивается по мере его распространения в среде. Угол поворота  $\varphi$  пропорционален магнитному полю  $\vec{B}$  и пройденному пути  $z$ .

$\varphi = \alpha B z$ , где  $\alpha$  — константа, которая зависит от типа атомов, их концентрации и частоты света.

Световое поле раскачивает диполи среды. Согласно теореме Лармора в магнитном поле электронная оболочка атома, как целое, вращается с угловой скоростью

$$\vec{\Omega} = \frac{e}{2m_e c} \vec{B}.$$

Здесь  $\vec{\Omega} \uparrow \uparrow \vec{B}$ .

Магнитное поле поворачивает диполи, но световое поле снова наводит диполи вдоль электрического поля  $E$  световой волны. В результате диполи колеблются не вдоль поля  $E$ , а под некоторым углом к нему. Излучение плоского слоя таких диполей имеет поляризацию, направленную вдоль линии колебаний каждого диполя. В результате интерференции этого излучения с полем падающей световой волны получается волна с поляризацией несколько развернутой в направлении колебаний диполя. Эта волна раскачивает диполи следующего слоя среды уже в направлении новой поляризации, и т. д.

-----

Реальное явление осложнено тем, что излучение слоя диполей сдвинуто по фазе относительно падающей световой волны. Поэтому более точный анализ основан на том, как изменяются в магнитном поле показатели преломления двух круговых поляризаций света. Круговая поляризация, в которой направление вращения вектора  $\vec{E}$  совпадает с направлением ларморовской прецессии  $\vec{\Omega} = \frac{e}{2m_e c} \vec{B}$  в магнитном поле, называется  $\sigma^+$  компонентой света.

Для  $\sigma^-$  компоненты света вектор  $\vec{E}$  вращается навстречу ларморовской прецессии. Заметим, что направления левой и правой круговой поляризации привязано к направлению луча, а направления  $\sigma^+$  и  $\sigma^-$  компонент привязаны к направлению магнитного поля.

Без магнитного поля частоты  $\sigma^+$  и  $\sigma^-$  компонент одинаковы. В магнитном поле к вращению вектора  $\vec{E}$  излучения каждой компоненты добавляется вращение ларморовской прецессии. В результате частоты  $\sigma^+$  и  $\sigma^-$  компонент сдвигаются на ларморовскую частоту  $\vec{\Omega} = \frac{e}{2m_e c} \vec{B}$  в разные стороны:

$\omega_0 + \Omega$  и  $\omega_0 - \Omega$ , где  $\Omega \ll \omega_0$ . Это так называемый эффект Зеемана, который вы будете проходить в курсе атомной физики.

Пусть  $(n^+ - 1)$  и  $(n^- - 1)$  — добавки к показателю преломления для двух поляризаций  $\sigma^+$  и  $\sigma^-$ . Тогда

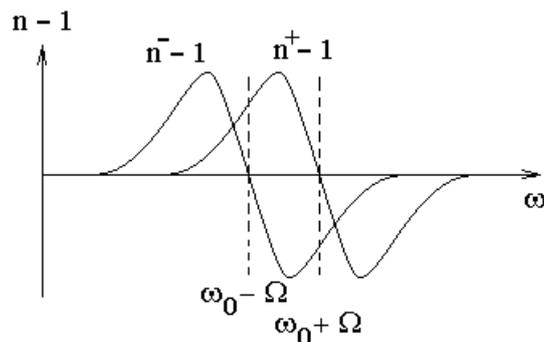


Рисунок сделан не в масштабе. Оба всплеска для  $(n^- - 1)$  и для  $(n^+ - 1)$  имеют очень малую относительную ширину. В таком случае из рисунка следует, что почти для всех частот выполняется неравенство  $n^- > n^+$ . Следовательно,  $\sigma^-$ -компонента отстает по фазе от  $\sigma^+$ -компоненты. Опережение  $\sigma^+$ -компоненты приводит к повороту суммарной линейной поляризации в сторону вращения  $\sigma^+$ -компоненты.  $\sigma^+$ -компонента вращается в ту же сторону, что и вращение электронной оболочки с частотой  $\vec{\Omega} \uparrow \vec{B}$ . Таким образом, оба объяснения эффекта Фарадея приводят к одинаковому направлению поворота линейной поляризации почти для всех частот спектра.

Заметим, что поворот поляризации образует правый винт с направлением магнитного поля, а не с направлением луча.

### **Экзамен. Естественное вращение плоскости поляризации.**

В эффекте Фарадея плоскость поляризации света поворачивается в магнитном поле. Среда может поворачивать плоскость поляризации и без магнитного поля.

В картонную коробку насыпем стальные пружины, закрученные в одну и ту же сторону. Если через коробку пропустить радиочастотное излучение, то линейная поляризация электромагнитного поля поворачивается при прохождении через коробку. Угол поворота пропорционален длине коробки.

Аналогично в оптическом диапазоне. Если молекула закручена, как пружина или спираль, то среда из таких молекул поворачивает поляризацию света.

Это и есть естественное вращение плоскости поляризации — вращение без магнитного поля.

Пример спиральных молекул — молекула сахара. Все молекулы природного сахара закручены в одну сторону. Раствор такого сахара в воде поворачивает плоскость поляризации.

Другой пример — вращение плоскости поляризации при распространении света вдоль оптической оси кристаллического кварца. Заметим, что плавленый кварц не вращает плоскость поляризации света.

### **Экзамен. Невзаимный элемент или ячейка Фарадея.**

В эффекте Фарадея поворот поляризации света образует правый винт с направлением магнитного поля, а не с направлением луча света. Это позволяет создать ячейку Фарадея.

Ячейка Фарадея — прозрачный стержень, оптическая длина которого различается во встречных направлениях.

Ячейка представляет собой стеклянный стержень с наклеенными на торцы пластинками  $\frac{\lambda}{4}$ . Вдоль оси стержня включают постоянное магнитное поле.

Пусть вдоль стержня идет циркулярно поляризованная волна. Тогда входит в ячейку и выходит из ячейки линейно поляризованный свет. Направление линейной поляризации составляет  $45^\circ$  с главными направлениями пластинки  $\frac{\lambda}{4}$ . Поворотом одной из пластинок  $\frac{\lambda}{4}$  до ее приклеивания к стержню можно добиться того, чтобы входящая и выходящая в ячейку волны были линейно поляризованы вдоль одного и того же направления.

Рассмотрим, как свет проходит одну из торцевых пластинок  $\frac{\lambda}{4}$ . Пусть на входе в пластинку свет циркулярно поляризован, тогда на выходе — линейно поляризованный свет. Рассмотрим это явление во времени в обратную сторону. Свет из линейно поляризованного превращается в циркулярно поляризованный свет, но при обращении во времени вращающийся вектор  $\vec{E}$  изменяет направление вращения. Следовательно, если на ячейку Фарадея в обоих направлениях падает линейно поляризованный свет, то в стержне встречные световые волны имеют циркулярные поляризации с вращением вектора  $\vec{E}$  во встречных направлениях. Одна из встречных волн —  $\sigma^+$ -компонента, а другая —  $\sigma^-$ -компонента. Показатели преломления для этих двух волн  $n^+$  и  $n^-$  различаются в магнитном поле, и оптические длины ячейки  $n^+l$  и  $n^-l$  тоже различаются, здесь  $l$  — геометрическая длина стержня.

Таким образом, оптическая длина ячейки Фарадея различается во встречных направлениях.

### **Факультатив. Оптическая развязка или оптический диод.**

На основе эффекта Фарадея можно сделать устройство, которое в одну сторону свет пропускает, а в другую — нет. Это так называемая оптическая развязка или оптический диод. Пусть прозрачный стержень с продольным магнитным полем поворачивает линейную поляризацию на  $45^\circ$  за счет эффекта Фарадея. На торцы стержня приклеим поляризаторы так, чтобы угол между осями поляризаторов был бы равен тем же  $45^\circ$ . Если свет линейной поляризации в одну сторону полностью пропускается обоими поляризаторами, то для света во встречном направлении поляризация повернется так, что второй поляризатор полностью не пропустит этот свет.

Другой вариант оптической развязки — это пара элементов: поляризатор и пластинка  $\frac{\lambda}{4}$ .

Через поляризатор проходит линейно поляризованный свет. Плоскость пластинки  $\frac{\lambda}{4}$  направлена перпендикулярно падающему на нее лучу, а оси пластинки  $\frac{\lambda}{4}$  направлены под углом  $45^\circ$  к направлению вектора  $\vec{E}$  пропущенной поляризатором световой волны.

Свет на входе в пластинку  $\frac{\lambda}{4}$  можно представить, как сумму двух линейных поляризаций с направлениями вектора  $\vec{E}$  по осям пластинки. На выходе из пластики между этими двумя поляризациями возникает разность хода  $\frac{\lambda}{4} + m\lambda$ , где  $m$  — целое число. Пластинка  $\frac{\lambda}{4}$  по определению имеет разность оптических толщин для двух поляризаций равную  $\frac{\lambda}{4} + m\lambda$ . Такой разности хода соответствует разность фаз  $\frac{\pi}{2}$ .

На выходе пластинки  $\frac{\lambda}{4}$  при сложении двух линейных поляризаций с разностью фаз  $\frac{\pi}{2}$  получается циркулярная поляризация. Если такой свет отразить в обратном направлении, то после отражения от зеркала правая круговая поляризация превращается в левую, и наоборот. Ортогональная круговая поляризация после прохождения через пластинку  $\frac{\lambda}{4}$  в обратном направлении превращается в ортогональную линейную поляризацию. Эту скрещенную по отношению к исходной линейную поляризацию поляризатор не пропускает.