

Экзамен. Голографическая интерферометрия.

Запишем на плоской фотопластинке голограмму поверхности некоторого предмета в монохроматическом свете.

Восстановим мнимое изображение этой поверхности с помощью голограммы и монохроматической опорной волны.

Одновременно с восстановлением изображения поместим реальную поверхность того же предмета на ее прежнее место туда, где находится ее восстановленное мнимое изображение. Пусть свет опорной волны падает на реальную поверхность предмета так же, как это было при записи голограммы.

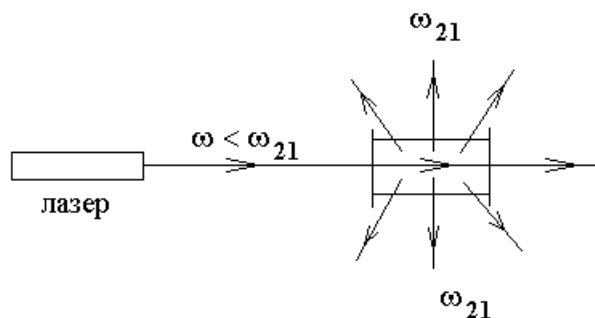
В монохроматическом свете будут одновременно видны и реальная поверхность и ее восстановленное мнимое изображение. Если обе поверхности чуть сдвинуть относительно друг друга, то излучение, идущее от них, очень похоже на свет отраженный от плоскопараллельной пластины. Если между поверхностями будет малый угол, то это будет похоже на отражение света от оптического клина с малым углом. При этом будут наблюдаться интерференционные полосы равной толщины.

Положение реальной поверхности подбирают так, чтобы интерференционные полосы стали как можно шире, то есть, чтобы реальная поверхность и ее мнимое изображение по возможности совпали. Если реальное тело чуть деформировать, то наблюдаемая поверхность покроется полосами равной толщины, отображающими деформацию тела. При этом происходит визуализация малых деформаций с величиной до долей микрона, так как ширина полос соответствует деформации на λ .

Это и есть метод голографической интерферометрии, позволяющий в реальном времени наблюдать и измерять малые деформации предмета.

Факультатив. Лазерное охлаждение.

Оптическая схема опыта. В кювету с газом светят лазером, и газ охлаждается:



Излучение лазера с частотой ω пропускают через кювету с газом, который имеет линию поглощения несколько большей частоты ω_{21} , чем частота излучения лазера ω , так что разность частот не превышает

доплеровской ширины спектральной линии $2kU$. Здесь $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число, $U = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}$ — наиболее вероятная скорость атомов газа.

Свет частично поглощается средой, переводя атомы среды в возбужденное состояние. Некоторые атомы возвращаются на нижний уровень энергии в результате спонтанного излучения, которое происходит равновероятно по всем направлениям.

Если после поглощения кванта света атомом газа безизлучательный переход на другие уровни энергии атома маловероятен, то газ охлаждается.

Рассмотрим два эквивалентных объяснения этого явления: объяснение через рассмотрение импульса и объяснение через рассмотрение энергии.

Рассмотрение через импульс.

Свет резонансно поглощается атомами, в системе отсчета которых частота света совпадает с частотой поглощающего перехода ω_{21} . С учетом продольного эффекта Доплера частота света в системе отсчета атома ω' отличается от частоты света ω в лабораторной системе отсчета:

$$\omega' = \omega - kV_z,$$

где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число, V_z — проекция скорости атома на направление лазерного луча.

Свет резонансно поглощается атомами, для которых

$$\omega' = \omega_{21} \Rightarrow \omega - kV_z = \omega_{21} \Rightarrow$$

$$V_z = \frac{\omega - \omega_{21}}{k} < 0.$$

Проекция скорости атомов на луч отрицательная, так как $\omega < \omega_{21}$ по условию эксперимента. Отрицательная проекция скорости означает, что атомы поглощающие свет летят навстречу лучу.

Каждый поглощенный фотон имеет небольшой импульс

$$p = \frac{\hbar\omega}{c},$$

который переходит к поглощающему свет атому.

При поглощении импульса фотона проекция скорости V_z атома на луч уменьшается по модулю, так как атом летел навстречу поглощенному фотону. Следовательно, уменьшается модуль импульса атома.

При излучении атом тоже испытывает отдачу от излучаемого фотона, но спонтанное излучение изотропно, поэтому при излучении фотона импульс атома увеличивается и уменьшается равновероятно.

В среднем в результате каждого акта поглощения и спонтанного излучения импульс атома уменьшается. Кинетическая энергия связана с

импульсом атома соотношением $E = \frac{p^2}{2m}$, а энергия связана с температурой

$E = \frac{3}{2}kT$. Уменьшение импульса означает уменьшение энергии и охлаждение.

Рассмотрим теперь объяснение лазерного охлаждения через рассмотрение энергии.

По условию эксперимента частота падающего света ω меньше частоты поглощающего перехода ω_{21} , тогда $\hbar\omega < \hbar\omega_{21}$, и получаемая атомом энергия падающего фотона меньше энергии, которую атом теряет при спонтанном излучении фотона.

Атом получает меньше энергии при поглощении, чем отдает при излучении. Следовательно, среда теряет энергию и охлаждается.

Рассмотрим этот процесс чуть подробнее.

В своей собственной системе отсчета атом поглощает и излучает свет одной и той же частоты ω_{21} , но в лабораторной системе отсчета частоты оказываются разными.

Поглощают свет атомы, которые летят навстречу лучу. При переходе из лабораторной системы отсчета в систему отсчета атома частота поглощаемого света увеличивается от ω до ω_{21} . Спонтанное излучение света равновероятно по направлениям, поэтому доплеровский сдвиг излучаемого кванта при возвращении в лабораторную систему отсчета равновероятно увеличивает и уменьшает частоту света. В среднем при излучении доплеровского сдвига частоты не происходит.

Предел охлаждения определяется тем, что атом при поглощении кванта света может остановиться, испытав отдачу от фотона. Тогда при излучении атом снова испытает отдачу и вернется к прежнему значению скорости. В таком случае охлаждения уже не будет.

Приравняем импульс фотона к импульсу атома

$$\begin{cases} p = \frac{h\nu}{c} \\ \frac{p^2}{2m} = \frac{3}{2}k_B T \end{cases} \Rightarrow T = \frac{h^2\nu^2}{3k_B m c^2} \approx \frac{1}{40000 \cdot A} \text{ (K)}.$$

Здесь T — предел лазерного охлаждения в Кельвинах, A — вес атома в атомных единицах, в которых атомный вес атома водорода равен единице.

$$U = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}} \approx \frac{0.6}{\sqrt{A}} \text{ (м/с)} \text{ — наиболее вероятная скорость при предельном}$$

охлаждении, выраженная в метрах в секунду; A — это вес атома в атомных единицах.

Дальнейшее охлаждение возможно по принципу открытого стакана с водой. Открытый стакан с водой имеет температуру ниже комнатной температуры, так как только молекулы с наибольшими энергиями способны преодолеть притяжение других молекул воды и вылететь с поверхности воды. При этом для остающихся в стакане молекул средняя энергия уменьшается.

Роль стакана при лазерном охлаждении играет система потенциальных ям. Для создания системы потенциальных ям используются три пары лазеров, которые светят навстречу друг другу по трем осям координат. Каждая пара лазеров создает стоячую световую волну, в пучности которой втягиваются атомы. Излучение лазеров далеко отстоит по частоте от линий поглощения атомов.

Втягивание атомов в пучность светового поля определяется тем, что энергия диполя в электрическом поле $W = -(\vec{p}, \vec{E})$, где величина наведенного диполя $\vec{p} = \alpha \vec{E}$. Тогда энергия наведенного диполя $W = -\alpha E^2$, или $W = -\frac{1}{2} \alpha E^2$ с учетом энергии запасенной упругими силами диполя. Сила, действующая на диполь $\vec{F} = -\vec{\nabla} W = \frac{1}{2} \alpha \vec{\nabla} (E^2)$. Градиент направлен в сторону увеличения поля E , то есть наведенные диполи втягиваются в световое поле.

Три ортогональные стоячие волны образуют решетку из потенциальных ям. В этих ямах скапливаются охлажденные лазером атомы. В каждой потенциальной яме остается много атомов. Атомы сталкиваются друг с другом, и когда один из них случайно получает достаточно большую энергию, он вылетает из потенциальной ямы. Такие вылетевшие атомы откачиваются насосом. По мере испарения горячих атомов из потенциальных ям, оставшиеся атомы становятся все холоднее. Таким образом, удастся практически остановить атомы в потенциальных ямах и довести их тепловые скорости до единиц миллиметров в секунду.

Экзамен. Эффект Комптона.

При рассеянии рентгеновского излучения на атомах твердой мишени появляется рассеянное излучение, которое имеет другую длину волны. Эффект Комптона состоит в том, что при рассеянии рентгеновских лучей на веществах с небольшим атомным номером изменение длины волны зависит только от угла рассеяния и больше ни от чего, ни от вещества на котором происходит рассеяние, ни от длины волны рентгеновского излучения.

У легких элементов мал заряд атомного ядра, поэтому мала энергия связи любого электрона с ядром. Энергия связи мала по сравнению с энергией фотона, поэтому можно считать, что фотон рассеивается на свободном электроны.

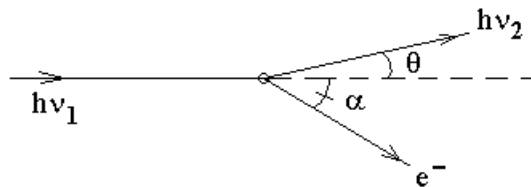
Рассмотрим задачу рассеяния рентгеновского фотона на свободном электроны на основе законов сохранения энергии и импульса.

Для любой релятивистской частицы справедливо следующее соотношение между энергией и импульсом: $\left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2 = (m_0c)^2$, где m_0 — масса покоя частицы. Для фотона масса покоя равна нулю $m_0 = 0$, поэтому $p = \frac{E}{c}$. Следовательно

$$\begin{cases} E = h\nu \\ p = \frac{h\nu}{c} \end{cases} \text{ — энергия и импульс фотона.}$$

Для электрона можно воспользоваться выражениями для кинетической энергии и импульса в нерелятивистской форме, так как рассматриваемые энергии (в частности энергия рентгеновского фотона $h\nu$) гораздо меньше энергии покоя электрона $m_e c^2$.

Рассмотрим диаграмму процесса рассеяния:



Напишем уравнения сохранения для энергии и для двух проекций импульса:

$$\begin{cases} h\nu_1 = h\nu_2 + \frac{m_e V^2}{2} \\ \frac{h\nu_1}{c} = \frac{h\nu_2}{c} \cdot \cos(\theta) + m_e V \cdot \cos(\alpha) \\ 0 = \frac{h\nu_2}{c} \cdot \sin(\theta) - m_e V \cdot \sin(\alpha) \end{cases}$$

Это три уравнения для трех неизвестных: ν_2, V, α . Заметим, что угол θ мы будем рассматривать не как неизвестную величину, а как переменный параметр задачи. Дело в том, что при одинаковых начальных условиях рентгеновский квант может рассеиваться и рассеивается в разных направлениях θ .

Преобразуем уравнения 2 и 3 к следующему виду:

$$\begin{cases} m_e V \cdot \cos(\alpha) = \frac{h}{c} \cdot (\nu_1 - \nu_2 \cdot \cos(\theta)) \\ m_e V \cdot \sin(\alpha) = \frac{h}{c} \cdot \nu_2 \cdot \sin(\theta) \end{cases}$$

Исключим угол α из этих уравнений. Для этого возведем уравнения в квадрат и сложим их. В результате получим

$$m_e^2 V^2 = \frac{h^2}{c^2} \cdot \left(v_1^2 - 2v_1v_2 \cdot \cos(\theta) + v_2^2 \cdot \cos^2(\theta) + v_2^2 \cdot \sin^2(\theta) \right).$$

С учетом $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ получим

$$m_e^2 V^2 = \frac{h^2}{c^2} \cdot \left(v_1^2 - 2v_1v_2 \cdot \cos(\theta) + v_2^2 \right).$$

Добавим и вычтем $2v_1v_2$ и получим

$$m_e^2 V^2 = \frac{h^2}{c^2} \cdot \left(v_1^2 - 2v_1v_2 \cdot \cos(\theta) + v_2^2 - 2v_1v_2 + 2v_1v_2 \right) \quad \Rightarrow$$

$$m_e^2 V^2 = \frac{h^2}{c^2} \cdot \left(v_1^2 - 2v_1v_2 + v_2^2 + 2v_1v_2 - 2v_1v_2 \cdot \cos(\theta) \right) \quad \Rightarrow$$

$$m_e V^2 = \frac{h^2}{m_e c^2} \cdot \left((v_1 - v_2)^2 + 2v_1v_2 \cdot (1 - \cos(\theta)) \right).$$

Левую часть равенства можно выразить иначе из уравнения

$$hv_1 = hv_2 + \frac{m_e V^2}{2} \quad \Rightarrow$$

$$m_e V^2 = 2h(v_1 - v_2).$$

Приравняем оба полученных выражения для $m_e V^2$ и получим

$$2h(v_1 - v_2) = \frac{h^2}{m_e c^2} \cdot \left((v_1 - v_2)^2 + 2v_1v_2 \cdot (1 - \cos(\theta)) \right).$$

На этом задача фактически решена, так как для каждого значения угла θ получено свое значение частоты рассеянного света v_2 .

Преобразуем результат к более традиционной форме с учетом неравенства $hv \ll m_e c^2$ энергия фотона много меньше энергии покоя электрона. Тогда

$$\frac{h(v_1 - v_2)}{m_e c^2} \ll 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{h^2 (v_1 - v_2)^2}{m_e c^2} \ll 2h(v_1 - v_2).$$

Учтем последнее неравенство, чтобы пренебречь первым слагаемым в правой части уравнения $2h(v_1 - v_2) = \frac{h^2}{m_e c^2} \cdot \left((v_1 - v_2)^2 + 2v_1v_2 \cdot (1 - \cos(\theta)) \right)$ и отбросить его. Тогда получим

$$2h(v_1 - v_2) = \frac{2h^2 v_1 v_2 (1 - \cos(\theta))}{m_e c^2}.$$

Разделим это равенство на произведение $2hv_1v_2$ и получим

$$\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1} = \frac{h}{m_e c^2} (1 - \cos(\theta)).$$

Умножим это уравнение на c и получим

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos(\theta)) \quad \Rightarrow$$

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{2h}{m_e c} \cdot \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

Здесь $\lambda_2 - \lambda_1$ — изменение длины волны рентгеновского света при неупругом рассеянии, m_e — масса покоя электрона, θ — угол рассеяния рентгеновского излучения.

Экзамен. Световое давление. Корпускулярная и волновая трактовки.

1). Корпускулярная трактовка давления света.

Рассмотрим свет, который нормально падает на площадку и полностью поглощается.

Давление — это сила, деленная на площадь $P = \frac{F}{S}$. Сила — это импульс,

деленный на время $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, или импульс света, который в единицу времени падает на площадку. Тогда давление — это импульс, который в единицу времени падает на единицу площади или плотность потока импульса.

Для фотона импульс и энергия связаны следующим соотношением:

$$p = mV = mc = \frac{mc^2}{c} = \frac{E}{c} \quad \Rightarrow$$

$$p = \frac{E}{c}.$$

Сравним давление P или плотность потока импульса $\frac{dp}{dt dS}$ с

интенсивностью I или плотностью потока энергии $\frac{dE}{dt dS}$ (обычно мы писали

это чуть иначе, как $\frac{dW}{dt dS}$). Между ними будет тот же коэффициент $\frac{1}{c}$, что и

между импульсом и энергией фотона $p = \frac{E}{c}$:

$$P = \frac{I}{c}.$$

Здесь P — давление света, I — интенсивность света.

Можно показать, что интенсивность света связана с объемной плотностью энергии следующим соотношением: $I = wc$, тогда

$$P = w.$$

Если свет не поглощается поверхностью, а полностью отражается от нее, то изменение импульса световых фотонов удваивается, соответственно удваивается и давление света:

$$P = 2 \frac{I}{c},$$

где I — интенсивность одной бегущей волны.

2). Волновая трактовка давления света.

Пусть линейно поляризованный свет нормально падает на идеальное металлическое зеркало и полностью отражается.

Поле \vec{E} световой волны вызывает электрический ток в тонком поверхностном слое металла.

Со стороны магнитного поля \vec{B} световой волны на заряды этого тока действует сила Лоренца:

$$\vec{F}_L = \frac{q}{c} [\vec{V}, \vec{B}] \quad (\text{выражение в системе единиц СГС Гаусса}).$$

Эта сила и создает давление света. И действительно, определим направление силы:

$$\begin{cases} \vec{V} \parallel \vec{E} \\ \vec{F}_L \perp \vec{V} \end{cases} \Rightarrow \vec{F}_L \perp \vec{E}.$$

Кроме того, $\vec{F}_L \perp \vec{B}$, что следует из $\vec{F}_L = \frac{q}{c} [\vec{V}, \vec{B}]$. Тогда

$$\begin{cases} \vec{F}_L \perp \vec{E} \\ \vec{F}_L \perp \vec{B} \end{cases} \text{ аналогично вектору Пойнтинга } \vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{H}] \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \vec{S} \perp \vec{E} \\ \vec{S} \perp \vec{B} \end{cases}.$$

Следовательно, сила Лоренца направлена так же, как и вектор Пойнтинга — вдоль луча и перпендикулярно рассматриваемой отражающей поверхности металла.

Факультатив. Дисперсионные соотношения Крамерса-Кронига.

Пусть единственное окно в комнате закрыто узкополосным светофильтром, который пропускает свет только с частотой ω . Строго монохроматический свет обязан быть по времени от минус до плюс бесконечности. Это с одной стороны.

С другой стороны, если свет за окном в какой-то момент включить, то в комнате свет не может появиться раньше этого момента независимо от того, насколько узкополосный светофильтр закрывает окно.

Это условие накладывает связь на функции $\aleph(\omega)$ и $n'(\omega)$, которая должна выполняться независимо от природы светофильтра.

И действительно, пусть $\tilde{\tau}(\omega)$ — комплексный амплитудный коэффициент пропускания светофильтра. Тогда комплексные амплитуды света на входе и на выходе светофильтра связаны соотношением:

$$\tilde{E}_{0_{\text{вых}}}(\omega) = \tilde{\tau}(\omega) \cdot \tilde{E}_{0_{\text{вх}}}(\omega)$$

Рассмотрим бесконечно короткую вспышку света перед светофильтром в виде δ -функции Дирака:

$$E_{\text{вх}}(t) = \delta(t).$$

Ее Фурье-образ — комплексная амплитуда света на входе светофильтра:

$$\tilde{E}_{0_{\text{вх}}}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{\text{вх}}(t) \cdot e^{i\omega t} \cdot dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \cdot e^{i\omega t} \cdot dt = \frac{1}{\pi} \cdot e^{i\omega 0} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \cdot dt = \frac{1}{\pi}.$$

Комплексная амплитуда на выходе светофильтра:

$$\tilde{E}_{0_{\text{вых}}}(\omega) = \tilde{\tau}(\omega) \cdot \tilde{E}_{0_{\text{вх}}}(\omega) = \frac{1}{\pi} \cdot \tilde{\tau}(\omega).$$

Тогда напряженность светового поля на выходе светофильтра, как функция времени имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} E_{\text{вых}}(t) &= \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}_{0_{\text{вых}}}(\omega) \cdot e^{-i\omega t} d\omega = \text{Re} \left(\int_0^{+\infty} \tilde{E}_{0_{\text{вых}}}(\omega) \cdot e^{-i\omega t} d\omega \right) = \\ &= \text{Re} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{\pi} \cdot \tilde{\tau}(\omega) \cdot e^{-i\omega t} d\omega \right) = \frac{1}{\pi} \cdot \text{Re} \left(\int_0^{+\infty} \tilde{\tau}(\omega) \cdot e^{-i\omega t} d\omega \right). \end{aligned}$$

До момента времени $t = 0$, в который произошла вспышка света перед фильтром, света после светофильтра быть не должно $E_{\text{вых}}(t) = 0$. Следовательно, при $t < 0$:

$$\text{Re} \left(\int_0^{+\infty} \tilde{\tau}(\omega) \cdot e^{-i\omega t} d\omega \right) = 0.$$

Если светофильтр представляет собой однородную среду толщиной z_0 , то амплитудный коэффициент пропускания такой среды имеет вид:

$$\tilde{\tau}(\omega) = e^{-\frac{\aleph(\omega) \cdot z_0}{2}} \cdot e^{i \frac{n'(\omega) \cdot \omega}{c} z_0}.$$

Тогда получим

$$\text{Re} \left(\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\aleph(\omega) \cdot z_0}{2}} \cdot e^{i \frac{n'(\omega) \cdot \omega}{c} z_0} \cdot e^{-i\omega t} d\omega \right) = 0 \text{ при } t < 0.$$

Этим интегральным соотношением связаны коэффициент поглощения любой среды $\aleph(\omega)$ и ее вещественный показатель преломления $n'(\omega)$.

В свою очередь, с величинами $n'(\omega)$ и $\aleph(\omega) = 2\frac{\omega}{c}n''(\omega)$ связаны вещественная $\alpha'(\omega)$ и мнимая $\alpha''(\omega)$ части комплексной поляризуемости атома. Эта связь оказывается проще для малой концентрации атомов $\tilde{n} = 1 + 2\pi N\tilde{\alpha}$ или $n' + in'' = 1 + 2\pi N \cdot (\alpha' + i\alpha'')$.

Из вещественности $P(t)$ и $E(t)$ можно доказать, что

$$\begin{cases} \alpha'(-\omega) = \alpha'(\omega) \\ \alpha''(-\omega) = -\alpha''(\omega) \end{cases}.$$

Крамерс (1927) и Крониг (1926) рассматривали интеграл $\int \frac{\alpha'(\omega) + i\alpha''(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega$, в котором интегрирование ведется по замкнутому контуру на комплексной плоскости. Интегрирование ведется в положительном направлении вдоль всей вещественной оси, и контур замыкается по полуокружности в верхней полуплоскости.

Крамерсу и Кронигу, используя условие $\tilde{\alpha}(\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 0$, удалось вычислить интеграл по вычетам. В результате, объединяя интегралы по положительным и отрицательным частотам, им удалось выразить из интегрального соотношения одну функцию $\alpha'(\omega)$ через другую $\alpha''(\omega)$ и наоборот:

$$\begin{cases} \alpha'(\omega) = \frac{2}{\pi} \cdot \mathcal{P} \int_0^{+\infty} \frac{\alpha''(\omega_0) \cdot \omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot d\omega_0 \\ \alpha''(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{+\infty} \frac{\alpha'(\omega_0)}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot d\omega_0 \end{cases} \quad \text{— соотношения Крамерса-Кронига.}$$

Здесь $\mathcal{P} \int$ — интеграл в смысле главного значения.