Факультатив. Зеркальный ящик. Плотность возможных состояний в пространстве импульсов или волновых векторов.

Покажем, что число возможных состояний в единичном интервале частот действительно пропорционально ν^2, как это видно в формуле Планка для излучения абсолютно черного тела.

Величина импульса фотона равна:

$$p = mV = mc = \frac{mc^2}{c} = \frac{E}{c} = \frac{\hbar\omega}{c}.$$

Длина волнового вектора или волновое число равно:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{\lambda\nu} = \frac{\omega}{c}.$$

Сравнивая два выражения, получим

$$\vec{p} = \hbar\vec{k}.$$

То есть импульс фотона и волновой вектор излучения — это почти одно и то же с точностью до постоянного сомножителя $\hbar$.

Волновой вектор $\vec{k}$ имеет координаты k_x, k_y, k_z. Рассмотрим фазу плоской волны

$$\vec{k},\vec{r} - \omega t = k_x x + k_y y + k_z z - \omega t.$$

Здесь $\frac{2\pi}{\omega}$ — временной период волны. Тогда $\frac{2\pi}{k_x}, \frac{2\pi}{k_y}, \frac{2\pi}{k_z}$ — пространственные периоды волны по осям x, y, z.

Рассмотрим пустой ящик с идеальными металлическими зеркальными внутренними поверхностями стенок. Разложим произвольный свет в ящике по плоским монохроматическим волнам. Рассмотрим, какие плоские волны могут существовать в этом зеркальном ящике. Направим оси координат вдоль ребер ящика. Зафиксируем момент времени t и координаты y, z. При перемещении вдоль x-координаты мы имеем волну с периодом $\frac{2\pi}{k_x}$. На идеальных зеркалах, перпендикулярных оси x, составляющая вектора $\vec{E}$ параллельная границе объема обращается в ноль, так как внутри идеального проводника $\vec{E} = 0$, а граничное условие для поля $\vec{E}$ имеет вид $E_{1\tau} = E_{2\tau}$. Тогда вдоль оси x мы имеем стоячую волну с узлами на зеркалах по крайней мере для составляющей вектора $\vec{E}$ перпендикулярной оси x. Следовательно, на длине ящика L_x укладывается целое число полуволн m_x с периодом $\frac{2\pi}{k_x}$. Тогда

$$L_x = m_x \cdot \frac{\pi}{k_x} \qquad => \qquad k_x = \frac{m_x \pi}{L_x}.$$

Аналогично $\begin{cases} k_y = \dfrac{m_y \pi}{L_y} \\ k_z = \dfrac{m_z \pi}{L_z} \end{cases}$.

Получается, что допустимые значения проекций k_x, k_y, k_z волнового вектора $\vec{k}$ изменяются с постоянным шагом по каждой из трех проекций. Следовательно, допустимые значения волнового вектора $\vec{k}$ имеют постоянную плотность в пространстве векторов $\vec{k}$.

Аналогично, плотность возможных значений импульса фотона $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ постоянна в пространстве импульсов.

Бесконечное трехмерное пространство можно рассматривать, как бесконечно большой ящик с зеркальными внутренними стенками.

Тогда в нашем пространстве допустимые значения волнового вектора и импульса фотона имеют постоянные плотности в соответствующих трехмерных пространствах.

В трехмерном пространстве векторов $\vec{k}$ (с постоянной плотностью допустимых значений) число значений вектора в интервале от k до $k + dk$ пропорционально объему между двумя сферами с радиусами k и $k + dk$. Этот объем равен

$4\pi k^2 dk \sim \omega^2 d\omega \sim \nu^2 d\nu$, так как $k = \dfrac{\omega}{c}$.

Следовательно, и плотность возможных состояний в единичном интервале волновых чисел пропорциональна ν^2, также как в единичном интервале частот, так как $k = \dfrac{2\pi\nu}{c} \sim \nu$.

Это объясняет появление сомножителя, пропорционального ν^2, в формуле Планка.