

### Факультатив. Частные решения волнового уравнения.

Общее решение волнового уравнения можно представить, как суперпозицию его частных решений.

Основной метод поиска частных решений дифференциальных уравнений в частных производных — это метод разделения переменных.

Метод разделения переменных позволяет найти решения уравнений многих типов: волнового уравнения, уравнения теплопроводности, уравнения Шредингера в квантовой механике и других уравнений.

Рассмотрим волновое уравнение для некоторой переменной величины  $A(t, \vec{r})$ :

$$\Delta A - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0.$$

Будем искать решения этого уравнения в виде произведения двух функций:

$$A(t, \vec{r}) = T(t) \cdot R(\vec{r}),$$

одна из которых зависит только от времени, а другая — только от координат.

Таких решений окажется настолько много, что нам их будет достаточно. Любая линейная комбинация этих решений тоже будет решением, что следует из линейности уравнения относительно неизвестной функции  $A$ .

Подставим  $A = TR$  в волновое уравнение для величины  $A$  и получим:

$$\Delta(TR) - \frac{1}{V^2} \cdot (TR)'' = 0, \text{ где две точки — это обозначение второй}$$

производной по времени.

Вынесем функцию времени  $T$  за вторые производные по координатам в операторе Лапласа  $\Delta$ , а функцию координат  $R$  вынесем за вторую производную по времени:

$$T \Delta R - \frac{1}{V^2} R T'' = 0.$$

Разделим это равенство на произведение  $TR$  и получим:

$$\frac{\Delta R}{R} - \frac{1}{V^2} \cdot \frac{T''}{T} = 0.$$

Здесь первое слагаемое зависит только от радиус-вектора  $\vec{r}$ , а второе — только от времени  $t$ . Это возможно только в том случае, если оба слагаемых равны одной и той же константе.

Обозначим эту константу, как  $(-k^2)$ , тогда

$$\begin{cases} \frac{\Delta R}{R} = -k^2 \\ \frac{1}{V^2} \cdot \frac{T''}{T} = -k^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta R + k^2 R = 0 \\ T'' + (kV)^2 T = 0 \end{cases}.$$

В случае, если константа  $(-k^2)$  окажется положительной, будем считать, что  $k$  — чисто мнимое число. Так при рассмотрении вопроса о полном внутреннем отражении, одна из проекций вектора  $\vec{k}$  действительно окажется мнимой.

Для пространственной части решения волнового уравнения получим

$$\Delta R + k^2 R = 0 \text{ — уравнение Гельмгольца.}$$

А для временной части получим

••  
 $T + \omega^2 T = 0$  — уравнение гармонических колебаний, где для краткости введено обозначение  $\omega \equiv kV$ .

Комплексные решения этих уравнений выглядят проще, чем вещественные решения. Поэтому обычно ищут комплексные решения, а затем рассматривают вещественную часть комплексного решения. Для линейного дифференциального уравнения с вещественными коэффициентами вещественная часть общего комплексного решения является общим вещественным решением.

Будем комплексные величины обозначать волной над соответствующей величиной, тогда  $\tilde{T}$  в наших обозначениях — комплексная величина, а  $T$  — вещественная величина.

Общее комплексное решение уравнения гармонических колебаний имеет следующий вид:

$\tilde{T} = \tilde{T}_{01} e^{i\omega t} + \tilde{T}_{02} e^{-i\omega t}$ , где  $\tilde{T}_{01}$  и  $\tilde{T}_{02}$  — комплексные произвольные константы интегрирования.

Общее решение уравнения гармонических колебаний можно получить, как линейную комбинацию решений вида:

$\tilde{T} = \tilde{T}_0 e^{-i\omega t}$ , где  $\omega$  принимает два возможных значения с одинаковым модулем, но разными знаками.

Знак минус в показателе мнимой экспоненты — это вопрос соглашения.  $\tilde{T}_0$  — произвольная комплексная константа интегрирования, различная для положительного и отрицательного значений  $\omega$ .

Вернемся теперь к рассмотрению пространственной части решения волнового уравнения — к уравнению Гельмгольца:

$$\Delta R(\vec{r}) + k^2 R(\vec{r}) = 0.$$

Продолжим поиск частных решений волнового уравнения методом разделения переменных. Будем теперь искать решение уравнения Гельмгольца методом разделение переменных в декартовых координатах. Ищем решение уравнения Гельмгольца для пространственной части решения волнового уравнения в виде произведения трех функций, каждая из которых зависит только от одной пространственной координаты:

$$R(\vec{r}) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z).$$

Подставим  $R = XYZ$  в уравнение Гельмгольца и получим:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (XYZ) + k^2 XYZ = 0.$$

Вынесем за знак производной по  $x$ -координате функции  $Y$  и  $Z$ , величины которых не зависят от переменной  $x$ . Аналогично поступим с производными по  $y$  и  $z$ . Тогда получим:

$$X''YZ + XY''Z + XYZ'' + k^2 XYZ = 0,$$

где двумя штрихами обозначена вторая производная в каждом случае по своей переменной величине.

Разделим это равенство на произведение функций  $XYZ$  и получим

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = -k^2,$$

где первое слагаемое зависит только от  $x$ -координаты, второе — только от  $y$ , третье — только от  $z$ . Это возможно только в том случае, если каждое из

этих слагаемых — константа. Обозначим эти константы, как  $(-k_x^2)$ ,  $(-k_y^2)$ ,

$(-k_z^2)$ . Тогда

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2,$$

и величины  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $k_z$  можно рассматривать, как проекции некоторого вектора  $\vec{k}$ .

$$\begin{cases} \frac{X''}{X} = -k_x^2 \\ \frac{Y''}{Y} = -k_y^2 \\ \frac{Z''}{Z} = -k_z^2 \end{cases}$$

Рассмотрим подробнее первое из трех уравнений.

$$\frac{X''}{X} = -k_x^2 \quad \Rightarrow \quad X'' + k_x^2 X = 0 \quad \text{— это уравнение}$$

гармонических колебаний только не от времени, а от пространственной координаты  $x$ .

$\tilde{X} = \tilde{X}_{01} e^{ik_x x} + \tilde{X}_{02} e^{-ik_x x}$  — общее комплексное решение этого уравнения.

Общее решение уравнения гармонических колебаний можно получить, как линейную комбинацию решений вида:

$\tilde{X} = \tilde{X}_0 e^{ik_x x}$ , где  $k_x$  принимает два возможных значения с одинаковым модулем, но разными знаками. То, что выбрано слагаемое без минуса в экспоненте — это вопрос соглашения.

Аналогично:

$$\begin{cases} \tilde{Y} = \tilde{Y}_0 e^{ik_y y} \\ \tilde{Z} = \tilde{Z}_0 e^{ik_z z} \end{cases}$$

Подставим  $\tilde{X}$ ,  $\tilde{Y}$ ,  $\tilde{Z}$  в  $\tilde{R}$  и получим:

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= \tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Z} = \tilde{X}_0 e^{ik_x x} \tilde{Y}_0 e^{ik_y y} \tilde{Z}_0 e^{ik_z z} = \\ &= \tilde{X}_0 \tilde{Y}_0 \tilde{Z}_0 e^{ik_x x} e^{ik_y y} e^{ik_z z} = \tilde{R}_0 e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} = \tilde{R}_0 e^{i(\vec{k}, \vec{r})} \end{aligned}$$

— это частное решение уравнения Гельмгольца.

Вернемся к решению волнового уравнения  $\Delta A - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0$ :

$$\tilde{A}(t, \vec{r}) = \tilde{R}\tilde{T} = \tilde{R}_0 e^{i(\vec{k}, \vec{r})} \cdot \tilde{T}_0 e^{-i\omega t} = \tilde{A}_0 e^{i((\vec{k}, \vec{r}) - \omega t)},$$

где  $\tilde{A}_0$  — произвольная комплексная константа интегрирования.

$$\tilde{A} = \tilde{A}_0 e^{i((\vec{k}, \vec{r}) - \omega t)} \text{ — частное комплексное решение волнового уравнения}$$

в виде плоских монохроматических волн.

То, что эта волна плоская, будет видно из анализа решения в последующих вопросах. Монохроматическая волна — это волна, в каждой пространственной точке которой колебания происходят только на одной частоте  $\omega$ . Напомним, что величины  $k$  и  $\omega$  не являются независимыми, так как произведение  $kV$  было нами обозначено, как  $\omega = kV$ , где  $V = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$  — параметр

волнового уравнения  $\Delta A - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0$ .

Есть причина, по которой решение в виде плоских монохроматических волн играет большую роль в оптике.

Дело в том, что с помощью преобразования Фурье по времени и координатам можно любую функцию этих переменных разложить по плоским монохроматическим волнам, если только функция достаточно быстро спадает на временных и пространственных бесконечностях.

Любое явление, такое как отражение, преломление, рассеяние, поглощение света, можно сначала рассмотреть для плоской монохроматической волны, а затем для любого света, как суперпозиции плоских волн.

Есть еще одна причина, по которой плоские монохроматические волны играют большую роль в оптике.

Взаимодействие любой световой волны с веществом с хорошей точностью такое же, как и взаимодействие плоской световой волны. Это справедливо в том случае, если радиусы кривизны поверхности равных фаз световой волны достаточно велики. Велики по сравнению с чем? Есть два параметра с размерностью длины — это длина волны и размер атома. Характерный размер атома составляет десятые доли нанометра, что в тысячу раз меньше длины волны света, а саму длину волны света в оптике обычно

рассматривают, как малый параметр по сравнению с геометрическими размерами предметов.

Другими словами, если рассмотреть маленький объем, линейные размеры которого гораздо меньше радиусов кривизны поверхности равных фаз, то в этом объеме волну можно считать почти плоской.

Это позволяет рассматривать отражение, преломление, поглощение и рассеяние света на примере плоской световой волны, так как всегда можно будет выбрать достаточно малый объем, в котором световую волну можно будет считать почти плоской и рассматривать отражение, преломление, поглощение или рассеяние света в этом малом объеме.

-----

Плоская симметрия решений связана с тем, что в уравнении Гельмгольца мы разделяли переменные в декартовой системе координат.

Если при решении уравнения Гельмгольца разделять переменные в цилиндрической системе координат, то получатся решения волнового уравнения в виде цилиндрических волн. Интересно, что среди этих волн есть волны, которые бегут вдоль оси и одновременно вокруг нее. В связи с этим у фотона образуется так называемый орбитальный угловой момент:

<http://igorivanov.blogspot.ru/2011/04/oam.html>

Заметим, что фотон с орбитальным угловым моментом может иметь одну частоту, то есть соответствовать монохроматическому свету. В таком случае через промежуток времени равный периоду волны поверхность равных фаз перейдет сама в себя. Ясно, что далеко от выделенной оси поверхность равных фаз сместится на длину волны, тогда и во всем пространстве она сместится на длину волны вдоль выделенной оси. Около выделенной оси направление движения волны перпендикулярное поверхности равных фаз составляет заметный угол с осью. В результате окажется, что даже в вакууме скорость световой волны отличается от константы  $c$  и равна константе  $c$ , умноженной на косинус угла между выделенной осью и направлением движения волны.

Если разделять переменные в сферической системе координат, то получатся сферические волны; если в трехмерной эллиптической системе — гауссовы пучки, похожие на лазерные пучки лучей, которые мы кратко рассмотрим позднее.

### **Экзамен. Параметры плоской монохроматической волны.**

$\tilde{A}(t, \vec{r}) = \tilde{A}_0 e^{i((\vec{k}, \vec{r}) - \omega t)}$  — плоская монохроматическая волна в комплексной форме.

Если эту плоскую монохроматическую волну подставить в волновое уравнение  $\Delta \tilde{A} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial t^2} = 0$ , то оно превращается в тождество при условии

$\omega = kV$ . Результат подстановки является доказательством того, что рассматриваемая плоская монохроматическая волна является решением волнового уравнения.

Можно доказать, что для любого линейного уравнения с вещественными коэффициентами вещественная часть комплексного решения является вещественным решением.

Тогда  $\operatorname{Re} \left( \tilde{A}_0 e^{i((\vec{k}, \vec{r}) - \omega t)} \right)$  — плоская монохроматическая волна в вещественной форме, она является решением волнового уравнения при условии  $\omega = kV$ .

Величину  $\tilde{A}_0$  называют комплексной амплитудой волны,

Если представить величину комплексной амплитуды  $\tilde{A}_0$ , как комплексное число в экспоненциальной форме  $\tilde{A}_0 = A_0 e^{i\varphi_0}$ , то

$A_0$  — вещественная амплитуда волны.

$\varphi_0$  — начальная фаза волны.

$$\begin{aligned} \tilde{A}(t, \vec{r}) &= \tilde{A}_0 e^{i((\vec{k}, \vec{r}) - \omega t)} = A_0 e^{i\varphi_0} e^{i((\vec{k}, \vec{r}) - \omega t)} = A_0 e^{i((\vec{k}, \vec{r}) - \omega t + \varphi_0)} = \\ &= A_0 e^{i((\vec{k}, \vec{r}) + \varphi_0)} e^{-i\omega t} = \tilde{A}_0 e^{i(\vec{k}, \vec{r})} e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

здесь  $\tilde{A}_0 e^{i(\vec{k}, \vec{r})}$  — комплексная амплитуда колебаний в точке с радиус-вектором  $\vec{r}$ ,

$((\vec{k}, \vec{r}) + \varphi_0)$  — начальная фаза колебаний в точке с радиус-вектором  $\vec{r}$ ,

$((\vec{k}, \vec{r}) - \omega t + \varphi_0)$  — фаза волны,

$\omega$  — циклическая частота волны, которую для краткости обычно будем просто называть частотой волны.

$\omega = 2\pi\nu$ , где  $\nu$  — частота волны.

$\nu = \frac{1}{T}$ , где  $T$  — период волны.

$\vec{k}$  — волновой вектор, как будет показано в следующем вопросе, он направлен перпендикулярно поверхности равных фаз.

$k \equiv |\vec{k}|$  — волновое число.

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , где  $\lambda$  — пространственный период волны, который называют длиной волны.

$\frac{1}{\lambda}$  — пространственная частота волны.

Тогда  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  — циклическая пространственная частота волны,

$k_x, k_y, k_z$  — циклические пространственные частоты вдоль осей  $x, y, z$ .

### **Экзамен. Фазовая скорость волны.**

Пусть  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  — единичные векторы вдоль декартовых осей координат.

Рассмотрим плоскую монохроматическую волну. Направим ось  $z$  вдоль вектора  $\vec{k}$ . Тогда  $\vec{k} \uparrow \vec{e}_z \Rightarrow k_x = k_y = 0 \Rightarrow k_z = |\vec{k}| = k$ .

Тогда  $(\vec{k}, \vec{r}) = k_x x + k_y y + k_z z = kz \Rightarrow$

$((\vec{k}, \vec{r}) - \omega t + \varphi_0) = kz - \omega t + \varphi_0$  — фаза волны.

Зафиксируем момент времени  $t$  и приравняем фазу к константе. Получающееся при этом уравнение относительно пространственных координат оказывается уравнением поверхности равных фаз или уравнением поверхности постоянной фазы:

$$\left. \begin{array}{l} kz - \omega t + \varphi_0 = const \\ t = const \end{array} \right\} \Rightarrow z = const \text{ — уравнение поверхности равных}$$

фаз или фазовой поверхности. Поверхность равных фаз называют еще фронтом волны.

Поверхность равных фаз  $z = const$  — это плоскость, следовательно, волна  $\tilde{A}(t, \vec{r}) = \tilde{A}_0 e^{i((\vec{k}, \vec{r}) - \omega t)}$  действительно плоская. Поверхность  $z = const$  перпендикулярна единичному вектору  $\vec{e}_z$ , направленному вдоль оси  $z$ . Вектор  $\vec{e}_z$  совпадает по направлению с вектором  $\vec{k}$  (направление оси  $z$  так было выбрано). Следовательно, для плоской волны фронт волны всегда перпендикулярен волновому вектору  $\vec{k}$ .

Неплоскую волну в малом объеме можно считать почти плоской, если радиусы кривизны фронта гораздо больше размеров рассматриваемого объема. Тогда направление, перпендикулярное поверхности равных фаз, можно считать направлением волнового вектора и для неплоской волны.

-----

Найдем теперь фазовую скорость волн, под которой будем понимать скорость перемещения поверхности равной фазы, фазы равной некоторой постоянной величине.

Ось  $z$  опять направим вдоль вектора  $\vec{k}$  и продифференцируем по времени уравнение поверхности равных фаз  $kz - \omega t + \varphi_0 = const$ , в котором координату  $z$  будем считать функцией времени  $t$ .

$$kz - \omega t + \varphi_0 = const \quad | \quad \frac{d \cdot}{dt} \Rightarrow$$

$$k \frac{dz}{dt} - \omega \frac{dt}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} \text{ — фазовая скорость, обозначим ее, как}$$

$V_\phi$ , тогда

$$V_\phi = \frac{\omega}{k}, \text{ что справедливо для плоской волны любой природы, не только}$$

для световой волны.

Поверхность равных фаз движется вдоль оси  $z$ , следовательно, туда же направлена фазовая скорость и с учетом  $\vec{k} \uparrow \uparrow \vec{e}_z$  получаем

$$\vec{V}_\phi \uparrow \uparrow \vec{k}.$$

Напомним, что при поиске решения волнового уравнения мы для краткости ввели обозначение  $\omega \equiv kV$ . Подставляя его в формулу для фазовой скорости  $V_\phi = \frac{\omega}{k}$ , получим  $V_\phi = V$ .

Как было показано в вопросе "Световые волны в прозрачной изотропной среде"  $V = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ . Тогда фазовая скорость электромагнитных волн равна

$$V_\phi = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}.$$

Из этого равенства можно найти величину показателя преломления  $n$ . По определению показателя преломления  $V_\phi = \frac{c}{n}$ . Сравнивая это равенство с

равенством  $V_\phi = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ , получаем

$$n = \sqrt{\epsilon\mu}.$$

В оптике  $\mu \approx 1 \Rightarrow n \approx \sqrt{\epsilon}$ .

Обычно в оптике  $n > 1$  и соответственно  $V_\phi < c$ . Однако, возможно выполнение условий  $0 < n < 1$  и  $V_\phi > c$ . Наконец, в некоторых экзотических ситуациях фазовая скорость может оказаться даже отрицательной величиной. Подробнее смотрите работу:

[Веселаго В. Г. Электродинамика веществ с одновременно отрицательными значениями  \$\epsilon\$  и  \$\mu\$ . // УФН. 1967. Т. 92. Вып. 3. С. 517-526.](#)

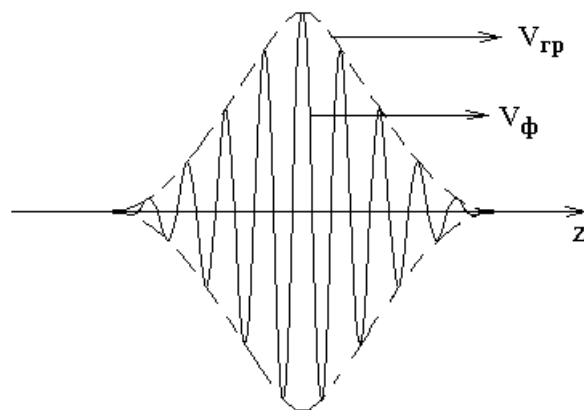
Такие вещества называются метаматериалами:

<http://ru.wikipedia.org/wiki/Метаматериал>

### **Экзамен. Групповая скорость волн.**

Рассмотрим световой импульс. Импульс имеет огибающую — относительно медленную функцию координат и времени, и имеет заполнение в виде относительно высокочастотной синусоиды, которую еще называют несущей.





Групповая скорость  $V_{гр}$  — это скорость движения огибающей светового импульса.

Фазовая скорость  $V_{ф}$  — это скорость движения заполнения светового импульса.

Групповая скорость отличается от фазовой скорости только в том случае, когда показатель преломления среды  $n$  зависит от частоты света  $\omega$ , то есть при условии  $n(\omega) \neq const$ . Напомним, что по определению показатель преломления связан с фазовой скоростью  $V_{ф} = \frac{c}{n}$ .

Групповая скорость — понятие не очень строгое. Это связано с тем, что световой импульс в процессе распространения в среде несколько деформируется, а скорость огибающей при деформации импульса теряет смысл.

Рассмотрим нестрогий вывод формулы для групповой скорости.

Пусть две плоские волны с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$  распространяются в направлении оси  $z$ . Пусть разность частот мала:  $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1$ . Пусть вещественные амплитуды двух волн одинаковы и равны  $A_0$ .

Рассмотрим волны в вещественном представлении:

$$\begin{aligned} A(t, z) &= A_0 \cos(k_1 z - \omega_1 t) + A_0 \cos(k_2 z - \omega_2 t) = \\ &= 2A_0 \cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2} z - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \cdot \cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2} z - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right), \end{aligned}$$

где использовано соотношение

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right).$$

Введем обозначения:

$$\begin{cases} \frac{k_1 + k_2}{2} \equiv k \\ \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \equiv \omega \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = -\frac{\delta\omega}{2} \\ \frac{k_1 - k_2}{2} = -\frac{\delta k}{2} = -\frac{dk}{d\omega} \cdot \frac{\delta\omega}{2} \end{cases}$$

Тогда

$$A(t, z) = 2A_0 \cos\left(\left(\frac{dk}{d\omega}z - t\right)\frac{\delta\omega}{2}\right) \cdot \cos(kz - \omega t).$$

Здесь  $2A_0 \cos\left(\left(\frac{dk}{d\omega}z - t\right)\frac{\delta\omega}{2}\right)$  — огибающая, которая медленно

изменяется при изменении  $t$  или  $z$ , так как  $|\delta\omega| \ll \omega$ .

$\cos(kz - \omega t)$  — несущая.

Для рассматриваемой формы огибающей  $2A_0 \cos\left(\left(\frac{dk}{d\omega}z - t\right)\frac{\delta\omega}{2}\right)$  можно

сказать, что  $\left(\frac{dk}{d\omega}z - t\right)\frac{\delta\omega}{2}$  — это фаза огибающей. Тогда групповую скорость или скорость движения огибающей можно найти, как скорость движения поверхности равных фаз огибающей.

С этой целью продифференцируем по времени уравнение поверхности равных фаз огибающей:

$\left(\frac{dk}{d\omega}z - t\right)\frac{\delta\omega}{2} = \text{const}$ , считая координату  $z$  функцией времени, и получим

$$\left(\frac{dk}{d\omega} \cdot \frac{dz}{dt} - \frac{dt}{dt}\right) \cdot \frac{\delta\omega}{2} = 0 \quad \Rightarrow$$

$\frac{dz}{dt} = \frac{d\omega}{dk}$  — скорость движения поверхности равных фаз огибающей или

скорость движения огибающей, она же по определению равна групповой скорости волн  $V_{gp}$ . Тогда

$V_{gp} = \frac{d\omega}{dk}$  — групповая скорость для волны любой природы, не только для

световой волны. Выражение для групповой скорости  $V_{gp} = \frac{d\omega}{dk}$  напоминает

выражение для фазовой скорости  $V_{\phi} = \frac{\omega}{k}$ .

Групповая скорость — это скорость передачи информации, поэтому она не может быть больше скорости света в пустоте  $V_{gp} \leq c$ . Тем не менее,

неравенство  $\frac{d\omega}{dk} > c$  — возможно, но при этом условии световой импульс расплывается быстрее, чем перемещается, и понятие групповой скорости теряет смысл.

