Факультатив. Обычно групповая скорость света меньше фазовой скорости.

Это следует из неравенства $\frac{dn}{d\omega}>0$, которое называют условием нормальной дисперсии. Это неравенство будет обосновано позднее.

Дисперсия света — это зависимость показателя преломления от частоты или от длины волны.

$V_{ф}=\frac{c}{n}=\frac{\omega}{k}$ => $k=\frac{n\omega}{c}$, тогда

$$V_{гр}=\frac{d\omega}{dk}=\frac{d\omega}{d\left(\frac{n\omega}{c}\right)}=c\frac{d\omega}{d(n\omega)}=\frac{c}{\frac{d(n\omega)}{d\omega}}=\frac{c}{n+\omega\frac{dn}{d\omega}}<\frac{c}{n}=V_{ф} \quad =>$$

$V_{гр}<V_{ф}$ при условии нормальной дисперсии $\frac{dn}{d\omega}>0$.

Экзамен. Поперечность световых волн.

Рассмотрим дифференциальное уравнение $y'=0$.

Возьмем от него производную и получим $y''=0$.

Общее решение второго уравнения имеет вид: $y=ax+b$.

Не все решения второго уравнения являются решениями первого уравнения. Лишние решения появились в результате дифференцирования первого уравнения, так как при этом часть информации о решениях была утеряна.

Вернемся к рассмотрению волнового уравнения.

Волновое уравнение для вектора $\vec{E}$ было получено в результате дифференцирования, то есть применения операции $rot(\cdot)$, к одному из уравнений системы Максвелла. Следовательно, не все решения волнового уравнения являются решениями системы уравнений Максвелла.

Подставим вещественное решение волнового уравнения для векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$ в виде плоских монохроматических волн в уравнения Максвелла и проверим, являются ли они решениями уравнений Максвелла.

$$\vec{E}=\mathrm{Re}\left(\tilde{\vec{E}}\right)=\mathrm{Re}\left(\tilde{\vec{E}}_0 e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)}\right) \qquad \vec{B}=\mathrm{Re}\left(\tilde{\vec{B}}\right)=\mathrm{Re}\left(\tilde{\vec{B}}_0 e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)}\right)$$

Для нас будет важно, что оба поля зависят от координат и времени только через их комбинацию в виде $\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)$. Обозначим эту комбинацию буквой $\varphi=\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t$.

φ — это фаза волны без учета начальной фазы φ_0, которая спрятана в комплексных амплитудах $\tilde{\vec{E}}_0$ и $\tilde{\vec{B}}_0$ и может оказаться различной для различных проекций векторов $\vec{E}(\varphi)$ и $\vec{B}(\varphi)$.

Рассмотрим производную по времени, например, от вектора $\vec{E}(\varphi)$:

$$\frac{\partial \vec{E}(\varphi)}{\partial t}=\frac{d\vec{E}(\varphi)}{d\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{d\vec{E}(\varphi)}{d\varphi}\cdot\frac{\partial\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)}{\partial t}=-\omega\cdot\frac{d\vec{E}(\varphi)}{d\varphi}.$$

Что в операторном виде можно записать, как:

$$\frac{\partial\,\cdot}{\partial t}=-\omega\frac{d\,\cdot}{d\varphi}.$$

Рассмотрим производную от вектора $\vec{E}(\varphi)$ по x координате:

$$\frac{\partial \vec{E}(\varphi)}{\partial x}=\frac{d\vec{E}(\varphi)}{d\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{d\vec{E}(\varphi)}{d\varphi}\cdot\frac{\partial\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)}{\partial x}=$$

$$=\frac{d\vec{E}(\varphi)}{d\varphi}\cdot\frac{\partial\left(k_x x+k_y y+k_z z-\omega t\right)}{\partial x}=k_x\cdot\frac{d\vec{E}(\varphi)}{d\varphi}$$

Тогда для вещественной плоской монохроматической волны:

$$\frac{\partial\,\cdot}{\partial x}=k_x\frac{d\,\cdot}{d\varphi}.$$

Тогда

$$\vec{\nabla}=\vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}=\vec{e}_x k_x\frac{d}{d\varphi}+\vec{e}_y k_y\frac{d}{d\varphi}+\vec{e}_z k_z\frac{d}{d\varphi}=\vec{k}\frac{d}{d\varphi}.$$

Теперь вернемся к рассмотрению уравнений Максвелла для вещественных плоских монохроматических волн.

$$div\left(\vec{D}\right)=0 \quad <=> \quad \left(\vec{\nabla},\vec{D}\right)=0 \quad => \quad \left(\vec{k}\frac{d}{d\varphi},\vec{D}\right)=0 \quad => \quad \frac{d}{d\varphi}\left(\vec{k},\vec{D}\right)=0$$

$$=> \quad \left(\vec{k},\vec{D}\right)=const.$$

Константа в правой части равенства не зависит ни от координат, ни от времени. Рассмотрим это равенство в некоторый момент времени, а затем рассмотрим его же в другой момент времени через половину периода световой волны. Каждая проекция вектора $\vec{D}$ через половину периода поменяет знак, вектор $\vec{k}$ от времени не зависит, следовательно, левая часть равенства поменяет знак через половину периода. Правая часть равенства тоже обязана поменять знак через половину периода, но она не может измениться, так как она — константа. Такое возможно только при условии, что константа равна нулю. Тогда $\left(\vec{k},\vec{D}\right)=0$.

Следовательно

$$\vec{D}\perp\vec{k} \qquad => \qquad \vec{E}\perp\vec{k}.$$

Аналогично из равенства $div\left(\vec{B}\right)=0$ получаем $\vec{B}\perp\vec{k}$.

Рассмотрим равенство $rot\left(\vec{E}\right)=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ => $\left[\vec{\nabla},\vec{E}\right]=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ =>

$\left[\vec{k}\frac{d}{d\varphi},\vec{E}\right]=-\frac{1}{c}(-\omega)\frac{d}{d\varphi}\vec{B}$ => $\frac{d}{d\varphi}\left[\vec{k},\vec{E}\right]=\frac{\omega}{c}\frac{d}{d\varphi}\vec{B}$ =>

$\frac{d}{d\varphi}\left\{\left[\vec{k},\vec{E}\right]-\frac{\omega}{c}\vec{B}\right\}=0$ => $\left[\vec{k},\vec{E}\right]-\frac{\omega}{c}\vec{B}=const$ =>

$\left[\vec{k},\vec{E}\right]-\frac{\omega}{c}\vec{B}=0$ => $\left[\vec{k},\vec{E}\right]=\frac{\omega}{c}\vec{B}$ => $\vec{E}\perp\vec{B}$.

Тогда векторы $\vec{E},\vec{B},\vec{k}$, образуют правую тройку взаимно ортогональных векторов в каждой точке пространства и в каждый момент времени.

Сравним с тройкой векторов $\vec{E},\vec{H},\vec{S}$, где $\vec{S}$ — вектор Пойнтинга. Из равенства $\vec{S}=\frac{c}{4\pi}\cdot\left[\vec{E},\vec{H}\right]$ с учетом ортогональности векторов $\vec{E},\vec{H}$ получим, что векторы $\vec{E},\vec{H},\vec{S}$ тоже образуют правую тройку взаимно ортогональных векторов. Следовательно

$\vec{k}\uparrow\uparrow\vec{S}$ — в прозрачной изотропной среде.

Позднее при рассмотрении кристаллооптики мы получим, что в анизотропной среде векторы $\vec{k}$ и $\vec{S}$ не параллельны. При этом вектор $\vec{k}$ показывает направление движения поверхности равных фаз, а вектор $\vec{S}$ показывает направление движения энергии электромагнитного поля.

В результате рассмотрения этого вопроса приходим к выводу. Для того, чтобы плоские электромагнитные волны были бы решением уравнений Максвелла необходимо, чтобы волны были поперечны $\begin{cases}\vec{E}\perp\vec{k}\\ \vec{B}\perp\vec{k}\end{cases}$, а электрическое поле ортогонально магнитному полю $\vec{E}\perp\vec{B}$.

Для того чтобы плоские электромагнитные волны были решением системы уравнений Максвелла, требуется выполнение определенного соотношения величин векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$, которое обсуждается в следующем вопросе.

Экзамен. Соотношение полей *E* и *H* в бегущей световой волне.

Из условия $\vec{k}\perp\vec{E}$ получим $\sin\left(\vec{k},\vec{E}\right)=1$. Тогда $\left\|\left[\vec{k},\vec{E}\right]\right\|=kE$. Применим этот результат к левой части равенства $\left[\vec{k},\vec{E}\right]=\frac{\omega}{c}\vec{B}$ и получим $kE=\frac{\omega}{c}B$ =>

$cE=\frac{\omega}{k}B$ => $cE=V_{\phi}B$ => $cE=\frac{c}{n}B$ => $B=nE$ =>

$B=\sqrt{\varepsilon\mu}\,E$ => $\mu H=\sqrt{\varepsilon\mu}\,E$ => $\sqrt{\varepsilon}\,E=\sqrt{\mu}\,H$

$\frac{\varepsilon E^2}{8\pi} = \frac{\mu H^2}{8\pi}$ — в бегущей световой волне энергия электрического поля равна энергии магнитного поля.

В системе СИ: $\frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}$ <=> $\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon}\, E = \sqrt{\mu_0 \mu}\, H$.

В вакууме:

$\begin{cases} E = B \\ \vec{E} \perp \vec{B} \end{cases}$ — в каждой точке и в каждый момент времени.

Если хотя бы одно из двух условий не выполнено, то через эту точку в пространстве проходит не одна волна, а несколько волн в разных направлениях.

Экзамен. Интенсивность света.

Об интенсивности света говорят только либо для одной бегущей волны, либо для суммы волн, которые бегут почти в одном направлении.

По определению интенсивности:

$I \equiv \left\langle \left| \vec{S} \right| \right\rangle_t$, где $\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\left[\vec{E}, \vec{H} \right]$ — вектор Пойнтинга, в системе СИ вектор Пойнтинга $\vec{S} = \left[\vec{E}, \vec{H} \right]$ и $I \equiv \left\langle \left| \vec{S} \right| \right\rangle_t$.

Интенсивность света I — усредненная по времени плотность потока энергии, то есть энергия, которая в единицу времени протекает через единицу площади, если площадка перпендикулярна свету.

Под временем усреднения подразумевают время реакции приемника света. Ни один приемник света не успевает реагировать на каждое оптическое колебание в отдельности. Иногда удобно считать, что время усреднения бесконечно.

Выразим интенсивность через вещественные поля E и H:

$$I \equiv \left\langle \left| \vec{S} \right| \right\rangle_t = \frac{c}{4\pi}\left\langle \left| \left[\vec{E}, \vec{H} \right] \right| \right\rangle_t = \frac{c}{4\pi}\left\langle EH \right\rangle_t = \frac{c}{4\pi}\left\langle E \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E \right\rangle_t = \frac{c\sqrt{\varepsilon\mu}}{4\pi\mu}\left\langle E^2 \right\rangle_t = \frac{cn}{4\pi\mu}\left\langle E^2 \right\rangle_t$$

$I = \frac{cn}{4\pi\mu}\left\langle E^2 \right\rangle_t$ — интенсивность света выражается через электрическое поле, а не через магнитное, так как воздействие света на вещество в основном сводится к воздействию именно электрического поля.

$$\left\langle E^2 \right\rangle_t = \left\langle E_0^2 \cdot \cos^2(\omega t) \right\rangle_t = \frac{1}{2} E_0^2 = \frac{1}{2}\left| \tilde{E}_0 \right|^2 \quad =>$$

$$I = \frac{cn}{4\pi\mu}\left\langle E^2 \right\rangle_t = \frac{cn}{8\pi\mu} E_0^2 = \frac{cn}{8\pi\mu}\left| \tilde{E}_0 \right|^2.$$

Интенсивность света обычно рассматривается в вакууме, в этом случае выражение для интенсивности упрощается: $I = \frac{c}{4\pi}\left\langle E^2 \right\rangle_t = \frac{c}{8\pi} E_0^2 = \frac{c}{8\pi}\left| \tilde{E}_0 \right|^2$.

В системе СИ: $I = \frac{\varepsilon_0 cn}{\mu}\left\langle E^2 \right\rangle_t = \frac{\varepsilon_0 cn}{2\mu}\left|\tilde{E}_0\right|^2 = \frac{\varepsilon_0 cn}{2\mu} E_0^2$.

Поляризация света.

Экзамен. Линейная поляризация.

Рассмотрим свет, который распространяется вдоль оси z, тогда $\vec{S} \uparrow\uparrow \vec{k} \uparrow\uparrow \vec{e}_z$.

Электромагнитные волны поперечны, следовательно, $\vec{E} \perp \vec{k} \uparrow\uparrow \vec{e}_z$. Тогда вектор $\vec{E}$ лежит в плоскости x, y и может быть выражен следующим образом $\vec{E} = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y$.

Пусть $E_y = 0$ во все моменты времени, тогда $\vec{E} = E_x \vec{e}_x$, то есть вектор $\vec{E}$ все время направлен вдоль одной линии.

Такой свет называют линейно поляризованным. Эту же поляризацию называют плоской поляризацией. При этом плоскость поляризации — это плоскость векторов $\vec{E}$ и $\vec{k}$.

Для линейной поляризации удобно ввести единичный вектор поляризации

$\vec{e}_p \parallel \vec{E}$ => $\vec{e}_p \perp \vec{k}$.

С учетом единичного вектора поляризации $\vec{e}_p$ получаем для линейной поляризации света

$\tilde{\vec{E}} = E_0 \vec{e}_p e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right) - \omega t + \varphi_0\right)}$, где

E_0 — вещественная амплитуда света. Чуть позже выясниться, что в таком же виде может быть выражен свет и любой другой поляризации.

Факультатив. Старое определение плоскости поляризации.

Заметим, что исторически плоскостью поляризации называли не плоскость векторов $\vec{E}$ и $\vec{k}$, а перпендикулярную ей плоскость векторов $\vec{B}$ и $\vec{k}$.

Причина в том, что поляризованный свет впервые был получен при отражении света, падающего на границу сред под углом Брюстера. Плоскостью поляризации отраженного света первоначально называли плоскость падения света.

Сегодня плоскость поляризации связана с вектором $\vec{E}$, так как на среду действует именно вектор $\vec{E}$, а не вектор $\vec{B}$.