<u>Экзамен. Формулы Френеля. Амплитудные коэффициенты отражения и пропускания</u> <u>(продолжение)</u>**.**

Преобразуем $r_{\|}$ к другому виду. Для этого сначала умножим разные слагаемые числителя и знаменателя на разные части равенства $n_1\sin(\alpha_1) = n_2\sin(\alpha_2)$ так, чтобы каждое слагаемое содержало произведение $n_1 n_2$ и получим:

$$r_{\|} = \frac{n_2\cos(\alpha_1) - n_1\cos(\alpha_2)}{n_2\cos(\alpha_1) + n_1\cos(\alpha_2)} = \frac{n_1 n_2 \sin(\alpha_1)\cos(\alpha_1) - n_1 n_2 \sin(\alpha_2)\cos(\alpha_2)}{n_1 n_2 \sin(\alpha_1)\cos(\alpha_1) + n_1 n_2 \sin(\alpha_2)\cos(\alpha_2)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\sin(2\alpha_1) - \frac{1}{2}\sin(2\alpha_2)}{\frac{1}{2}\sin(2\alpha_1) + \frac{1}{2}\sin(2\alpha_2)} = \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)\cdot\cos(\alpha_1 + \alpha_2)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)\cdot\cos(\alpha_1 - \alpha_2)} = \frac{tg(\alpha_1 - \alpha_2)}{tg(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

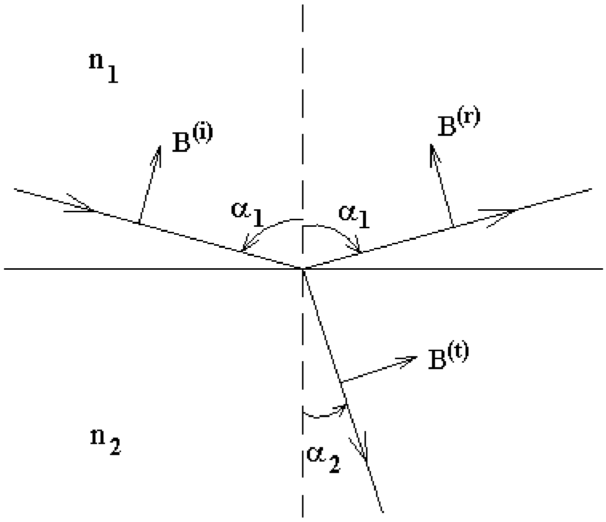
Окончательно:

$$r_{\|} = \frac{tg(\alpha_1 - \alpha_2)}{tg(\alpha_1 + \alpha_2)}.$$

Эта формула понадобиться нам в дальнейшем. Заметим, что она получена в приближении $\mu = 1$.

II). Поляризация $\perp$ плоскости падения света.

Выберем положительные направления для векторов $\vec{B}$ трех световых волн так, чтобы положительные направления векторов $\vec{E}$ этих волн совпали.



Для поляризации света перпендикулярной плоскости падения воспользуемся теми же граничными условиями $\begin{cases} \tilde{E}_{\tau 1} = \tilde{E}_{\tau 2} \\ \tilde{H}_{\tau 1} = \tilde{H}_{\tau 2} \end{cases}$. Тогда

$$\begin{cases} \tilde{E}^{(i)} + \tilde{E}^{(r)} = \tilde{E}^{(t)} \\ \tilde{H}^{(i)} \cos(\alpha_1) - \tilde{H}^{(r)} \cos(\alpha_1) = \tilde{H}^{(t)} \cos(\alpha_2) \end{cases}$$

С учетом соотношения $\sqrt{\varepsilon}\tilde{E} = \sqrt{\mu}\tilde{H}$, получим $\tilde{H} = \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}}\tilde{E} = \sqrt{\dfrac{\varepsilon\mu}{\mu^2}}\tilde{E} = \dfrac{n}{\mu}\tilde{E}$.

Подставим это во второе уравнение системы и получим пару уравнений для амплитуд отраженной и преломленной волн:

$$\begin{cases} \tilde{E}^{(i)} + \tilde{E}^{(r)} = \tilde{E}^{(t)} \\ \dfrac{n_1}{\mu_1}\tilde{E}^{(i)} \cos(\alpha_1) - \dfrac{n_1}{\mu_1}\tilde{E}^{(r)} \cos(\alpha_1) = \dfrac{n_2}{\mu_2}\tilde{E}^{(t)} \cos(\alpha_2) \end{cases}.$$

Решая уравнения, находим формулы Френеля для амплитуды отраженной и преломленной световых волн для поляризации света, перпендикулярной плоскости падения света:

$$\begin{cases} \tilde{E}_{\perp}^{(r)} = \tilde{E}_{\perp}^{(i)} \cdot \dfrac{\dfrac{n_1}{\mu_1} \cdot \cos(\alpha_1) - \dfrac{n_2}{\mu_2} \cdot \cos(\alpha_2)}{\dfrac{n_1}{\mu_1} \cdot \cos(\alpha_1) + \dfrac{n_2}{\mu_2} \cdot \cos(\alpha_2)} \\ \tilde{E}_{\perp}^{(t)} = \tilde{E}_{\perp}^{(i)} \cdot \dfrac{2 \cdot \dfrac{n_1}{\mu_1} \cdot \cos(\alpha_1)}{\dfrac{n_1}{\mu_1} \cdot \cos(\alpha_1) + \dfrac{n_2}{\mu_2} \cdot \cos(\alpha_2)} \end{cases}$$

и, заменяя μ на единицу, как это обычно делают в учебниках по оптике, получаем для амплитудных коэффициентов отражения $r_{\perp} \equiv \dfrac{\tilde{E}_{\perp}^{(r)}}{\tilde{E}_{\perp}^{(i)}}$ и пропускания $\tau_{\perp} \equiv \dfrac{\tilde{E}_{\perp}^{(t)}}{\tilde{E}_{\perp}^{(i)}}$ формулы Френеля для поляризации света перпендикулярной плоскости падения света:

$$\begin{cases} r_{\perp} = \dfrac{n_1 \cdot \cos(\alpha_1) - n_2 \cdot \cos(\alpha_2)}{n_1 \cdot \cos(\alpha_1) + n_2 \cdot \cos(\alpha_2)} \\ \tau_{\perp} = \dfrac{2n_1 \cdot \cos(\alpha_1)}{n_1 \cdot \cos(\alpha_1) + n_2 \cdot \cos(\alpha_2)} \end{cases}.$$

<u>Экзамен. Угол Брюстера и брюстеровские окна лазерных трубок.</u>

Рассмотрим условие $\alpha_1+\alpha_2=\frac{\pi}{2}$, где α_1 — угол падения света на границу раздела двух сред, α_2 — угол преломления.

Если $\alpha_1+\alpha_2=\frac{\pi}{2}$, то $tg\left(\alpha_1+\alpha_2\right)=\infty$. Подставим это значение в выражение $r_{\|}=\frac{tg\left(\alpha_1-\alpha_2\right)}{tg\left(\alpha_1+\alpha_2\right)}$ и получим

$r_{\|}=0$.

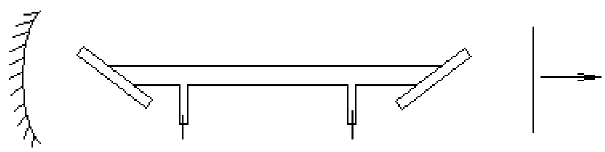
Сравнивая этот результат с другим выражением для коэффициента отражения $r_{\|}=\frac{n_2\cos\left(\alpha_1\right)-n_1\cos\left(\alpha_2\right)}{n_2\cos\left(\alpha_1\right)+n_1\cos\left(\alpha_2\right)}$ получаем $n_2\cos\left(\alpha_1\right)-n_1\cos\left(\alpha_2\right)=0$.

Откуда

$$\frac{n_2}{n_1}=\frac{\cos\left(\alpha_2\right)}{\cos\left(\alpha_1\right)}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha_2\right)}{\cos\left(\alpha_1\right)}=\frac{\sin\left(\alpha_1\right)}{\cos\left(\alpha_1\right)}=tg\left(\alpha_1\right).$$

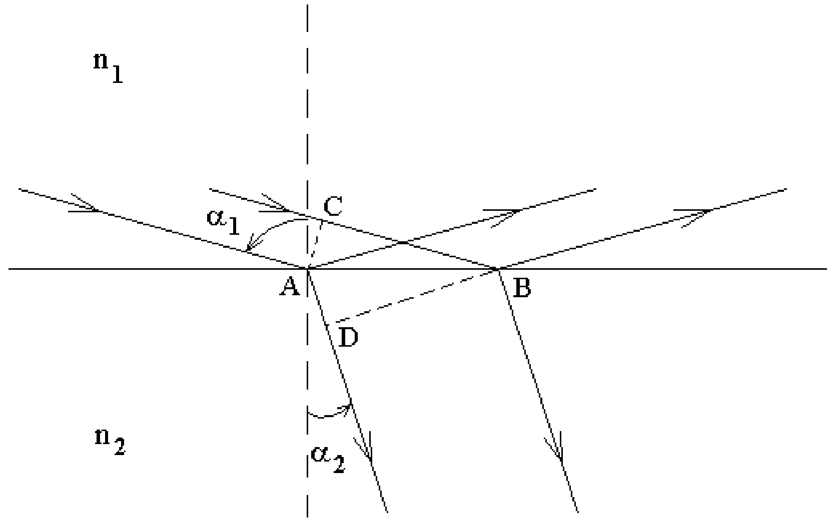
Окончательно получаем, что для угла падения α_1 такого, что $tg\left(\alpha_1\right)=\frac{n_2}{n_1}$, в отраженном свете нет поляризации параллельной плоскости падения света $r_{\|}=0$. Такой угол падения света α_1 называется углом Брюстера, а уравнение $tg\left(\alpha_1\right)=\frac{n_2}{n_1}$ удобно для расчета угла Брюстера по известным значениям показателя преломления двух сред n_1 и n_2.

Прохождение света без потерь на отражение используется в лазерах с малым усилением активной среды. Так усиливающая свет лазерная среда в газовых лазерах обычно помещается в разрядную трубку с брюстеровскими окнами. Брюстеровские окна — прозрачные плоскопараллельные пластины, расположенные так, что нормаль к пластине составляет угол Брюстера с оптической осью лазера.



Экзамен. Коэффициенты отражения и пропускания по энергии.

Рассмотрим пучок лучей конечной ширины.



Из рисунка видно, что ширина преломленного пучка BD отличается от ширины AC падающего пучка лучей.

Интенсивность света — это энергия, падающая в единицу времени на площадку единичной площади перпендикулярную лучу. Изменение площади сечения пучка и приводит к неравенству $I^{(i)} \neq I^{(r)} + I^{(t)}$.

Если же рассмотреть энергию, падающую на единицу площади границы раздела сред, то для этой энергии падающая энергия равна сумме отраженной и преломленной.

Площадь пучка на границе раздела сред больше площади поперечного сечения пучка, так как $AB = \dfrac{AC}{\cos(\alpha_1)} = \dfrac{BD}{\cos(\alpha_2)}$. Поэтому энергия, проходящая в единицу времени через единицу площади границы раздела сред (на AB надо делить), меньше интенсивности и равна $I \cdot \cos(\alpha)$.

Тогда условие того, что падающая на границу раздела сред энергия равна сумме отраженной и преломленной энергий, имеет следующий вид:

$$I^{(i)} \cos(\alpha_1) = I^{(r)} \cos(\alpha_1) + I^{(t)} \cos(\alpha_2).$$

Разделим это равенство на произведение $I^{(i)} \cos(\alpha_1)$ и получим:

$$\frac{I^{(r)} \cos(\alpha_1)}{I^{(i)} \cos(\alpha_1)} + \frac{I^{(t)} \cos(\alpha_2)}{I^{(i)} \cos(\alpha_1)} = 1.$$

Здесь первое слагаемое $\dfrac{I^{(r)} \cos(\alpha_1)}{I^{(i)} \cos(\alpha_1)} = \dfrac{I^{(r)}}{I^{(i)}} \equiv R$ называют коэффициентом отражения по энергии или отражательной способностью. Второе слагаемое $\dfrac{I^{(t)} \cos(\alpha_2)}{I^{(i)} \cos(\alpha_1)} \equiv T$ называют коэффициентом пропускания по энергии или пропускательной способностью.

$R + T = 1$ — вся падающая на границу раздела сред энергия или отражается или проходит насквозь.

Обычно под коэффициентами отражения и пропускания понимают не амплитудные коэффициенты $\begin{cases} r \equiv \dfrac{\tilde{E}^{(r)}}{\tilde{E}^{(i)}} \\ \tau \equiv \dfrac{\tilde{E}^{(t)}}{\tilde{E}^{(i)}} \end{cases}$,

а именно энергетические коэффициенты R и T.

Найдем связь амплитудных и энергетических коэффициентов отражения и пропускания.

Интенсивность света I связана с вещественной E_0 или комплексной $\tilde{E}_0$ амплитудой света соотношением:

$$I = \frac{cn}{8\pi\mu} E_0^2 = \frac{cn}{8\pi\mu} \left|\tilde{E}_0\right|^2.$$

Тогда для энергетического коэффициента отражение R получим

$$R \equiv \frac{I^{(r)}}{I^{(i)}} = \frac{\dfrac{cn_1}{8\pi\mu_1}\left|\tilde{E}_0^{(r)}\right|^2}{\dfrac{cn_1}{8\pi\mu_1}\left|\tilde{E}_0^{(i)}\right|^2} = \left(\frac{\left|\tilde{E}_0^{(r)}\right|}{\left|\tilde{E}_0^{(i)}\right|}\right)^2 = |r|^2 \qquad \Rightarrow$$

$R = |r|^2$ — связь энергетического и амплитудного коэффициентов отражения.

Исключая случай полного внутреннего отражения, который мы рассмотрим позднее, амплитудный коэффициент отражения для прозрачных сред всегда вещественен. Тогда

$$R = r^2.$$

В случае полного внутреннего отражения света энергетический коэффициент отражения равен единице $R = 1$. Отраженная световая волна при этом сдвинута по фазе относительно падающей волны. По этой причине амплитудный коэффициент отражения r — комплексная величина с единичным модулем $|r| = 1$.

Для энергетического коэффициента пропускания

$$T \equiv \frac{I^{(t)} \cdot \cos(\alpha_2)}{I^{(i)} \cdot \cos(\alpha_1)} = \frac{\dfrac{cn_2}{8\pi\mu_2} \cdot \left|\tilde{E}_0^{(t)}\right|^2 \cdot \cos(\alpha_2)}{\dfrac{cn_1}{8\pi\mu_1} \cdot \left|\tilde{E}_0^{(i)}\right|^2 \cdot \cos(\alpha_1)} = \frac{n_2\mu_1 \cdot \cos(\alpha_2)}{n_1\mu_2 \cdot \cos(\alpha_1)} \cdot \left|\frac{\tilde{E}_0^{(t)}}{\tilde{E}_0^{(i)}}\right|^2 =$$

$$= \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{n_2 \cdot \cos(\alpha_2)}{n_1 \cdot \cos(\alpha_1)} \cdot \tau^2 \approx \frac{n_2 \cdot \cos(\alpha_2)}{n_1 \cdot \cos(\alpha_1)} \cdot \tau^2.$$

Окончательно получаем:

$$T = \frac{n_2 \cdot \cos(\alpha_2)}{n_1 \cdot \cos(\alpha_1)} \cdot \tau^2 \qquad R = r^2 \qquad T + R = 1.$$

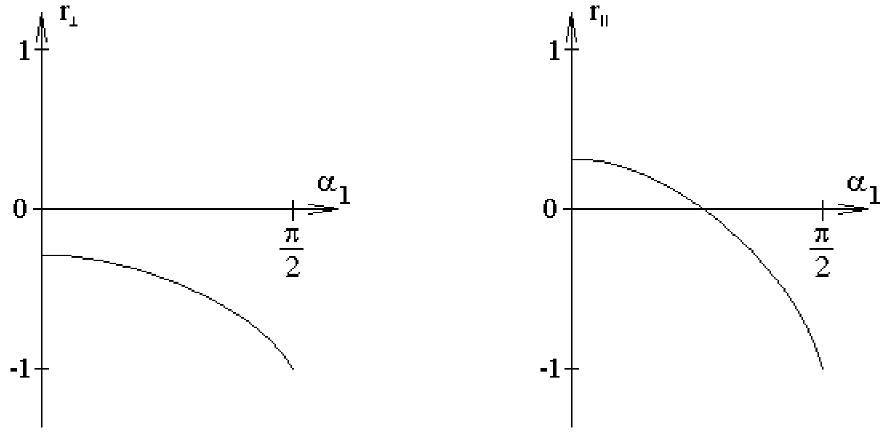
Экзамен. Потеря полуволны при отражении от оптически более плотной среды.

Рассмотрим нормальное падение света на границу раздела двух сред $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, тогда $\cos(\alpha_1) = \cos(\alpha_2) = 1$, откуда $r_\perp = -r_\parallel = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} < 0$ при условии отражения от оптически более плотной среды $n_2 > n_1$. Соотношение $r_\perp = -r_\parallel$ связано с не очень удачным выбором положительного направления вектора $\vec{E}$ отраженной волны для поляризации параллельной плоскости падения света.

Неравенство $r_\perp = -r_\parallel < 0$ означает, что для любой поляризации при нормальном падении света в отраженной волне вектор $\vec{E}$ направлен навстречу вектору $\vec{E}$ падающей волны.

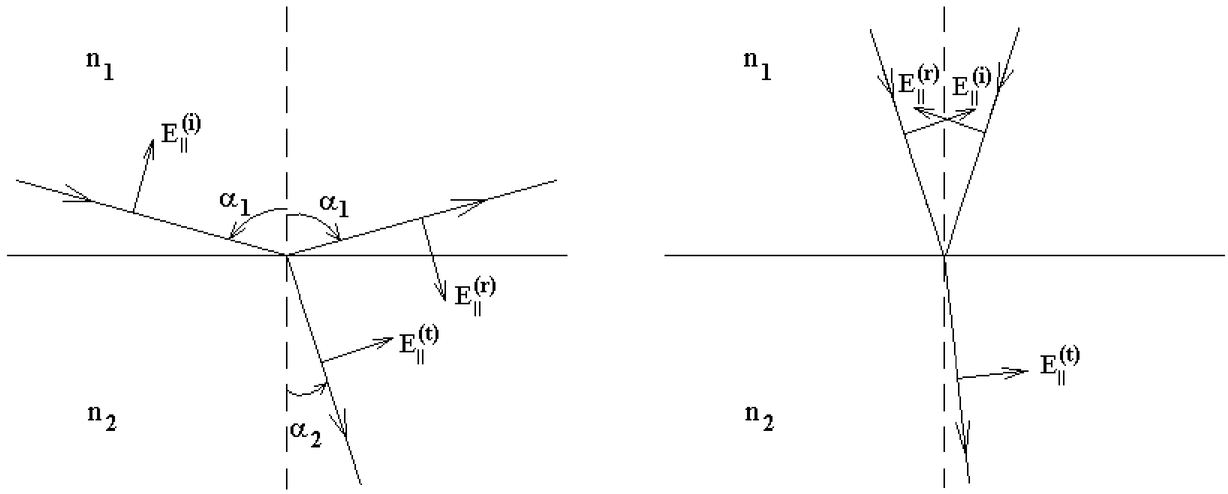
Пусть отраженная волна имеет отрицательную амплитуду. Эту минус единицу в качестве сомножителя можно представить, как $-1 = e^{i\pi}$. Следовательно, можно сказать, что отраженная волна сдвинута по фазе на π. Сдвиг фазы π эквивалентен разности хода $\frac{\lambda}{2}$, поэтому и говорят, что при отражении от оптически более плотной среды происходит потеря полуволны.

Рассмотрим графики зависимостей амплитудных коэффициентов отражения от угла падения для двух поляризаций.



Из рисунка можно сделать вывод, что при отражении света от оптически более плотной среды векторы $\vec{E}$ отраженной и падающей волн направлены навстречу друг другу или почти навстречу при любом угле падения и любой поляризации света. Для поляризации перпендикулярной плоскости падения результат более или менее очевиден, так как амплитудный коэффициент отражения $r_{\perp}$ всегда отрицателен.

Для поляризации в плоскости падения света знак коэффициента отражения меняется при изменении угла падения, но векторы $\vec{E}$ остаются примерно противоположно направленными в падающей и отраженной волнах при любых углах падения света. Это видно из ниже следующих рисунков, на которых показаны направления вектора $\vec{E}$ в двух предельных случаях при $\alpha_1 \approx \dfrac{\pi}{2}$ и при $\alpha_1 \approx 0$.



<u>Экзамен. Отражение света при скользящем падении луча.</u>

Скользящее падение луча на границу двух сред — это угол падения α_1 близкий к $\dfrac{\pi}{2}$.

$$\alpha_1 \to \frac{\pi}{2} \quad => \quad \cos(\alpha_1) \to 0.$$

Тогда

$$r_{\parallel} = \frac{n_2\cos(\alpha_1) - n_1\cos(\alpha_2)}{n_2\cos(\alpha_1) + n_1\cos(\alpha_2)} = \frac{-n_1\cos(\alpha_2)}{+n_1\cos(\alpha_2)} = -1, \quad \text{так как} \quad \cos(\alpha_2) \neq 0,$$

потому что $\alpha_2 \neq \alpha_1$.

Аналогично для второй поляризации

$$r_{\perp} = \frac{n_1\cos(\alpha_1) - n_2\cos(\alpha_2)}{n_1\cos(\alpha_1) + n_2\cos(\alpha_2)} = \frac{-n_2\cos(\alpha_2)}{+n_2\cos(\alpha_2)} = -1.$$

Для обеих поляризаций при скользящем падении света $r = -1$ => $R = r^2 = 1$.

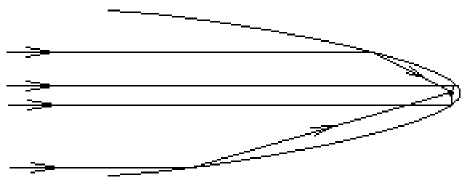
Следовательно, при скользящем падении света на границу раздела двух сред коэффициент отражения стремится к единице независимо от характеристик этих сред.

Экзамен. Зеркало телескопа для мягкого рентгеновского излучения.

Рентгеновское излучение с длинами волн из диапазона 0.01 нм < λ < 5 нм имеет высокую проникающую способность, то есть почти не отражается и не поглощается.

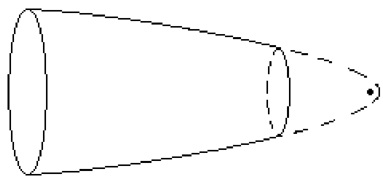
Однако при скользящем падении света на металлическую поверхность мягкие рентгеновские лучи λ > 1 нм испытывают заметное отражение.

Рассмотрим параболическое зеркало. Параллельный пучок лучей, падающий на параболическое зеркало параллельно его оси, собирается в одну точку в фокусе зеркала.



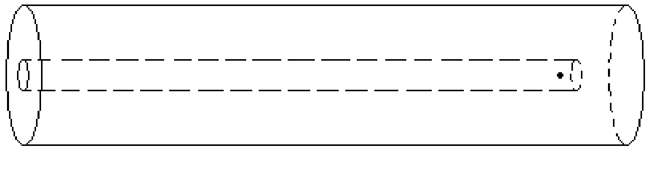
В фокусе зеркала можно поставить приемник излучения. Свет от удаленного источника будет собираться на приемнике в том случае, если направить ось параболического зеркала на источник излучения. Поэтому такое параболическое зеркало и приемник в его фокусе можно рассматривать, как телескоп.

Для мягкого рентгеновского излучения заметное отражение будет только при скользящем падении излучения на поверхность зеркала, поэтому от параболического зеркала можно оставить кольцо, вырезанное из параболоида вращения далеко от фокуса.



Приемник излучения ФЭУ (фотоэлектронный умножитель) устанавливают в фокусе параболоида. Такого типа приемник может регистрировать отдельные фотоны.

Для более жесткого рентгеновского излучения телескоп представляет собой длинный толстостенный свинцовый стакан, на дне которого устанавливают приемник излучения.



Оба вида рентгеновского телескопа имеют достаточно узкую диаграмму направленности принимаемого излучения.