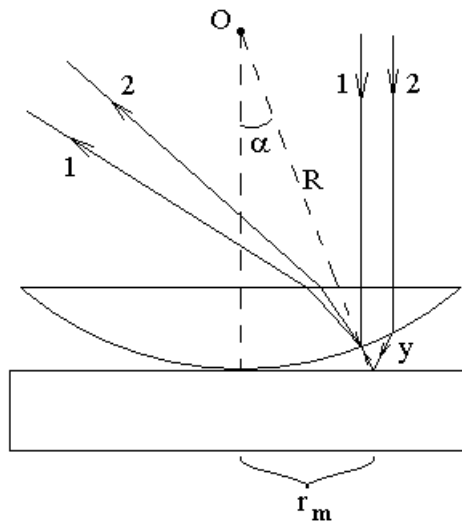


Экзамен. Кольца Ньютона.

Кольца Ньютона в отраженном свете — это разновидность полос равной толщины, локализованных в области соприкосновения плоской и сферической поверхностей.



Ход интерферирующих лучей изображен на рисунке. Нас интересуют два луча. Первый из них (луч 1) отражается от сферической границы. Вторичный луч отражается от плоской границы и на обратном пути проходит сферическую границу через точку отражения первого луча.

Обозначим буквой y ширину зазора между плоской границей пластинки и соприкасающейся с ней сферической границей линзы. Ширина этого зазора много меньше радиуса кривизны поверхности линзы $y \ll R$. В таком случае угол между двумя поверхностями обсуждаемого воздушного зазора мал $\alpha \ll 1$. Этот угол равен углу между двумя направлениями, одно из которых — это направление вертикально вниз из центра кривизны сферической поверхности в точку касания сферы и плоскости. Второе направление — это направление из центра сферической поверхности в точку прохождения сферической поверхности интерферирующими лучами. Углы равны, как углы со взаимно ортогональными сторонами.

На рисунке для наглядности угол α не очень мал. В результате оказывается, что луч, отраженный от плоской границы, проходит заметно различный путь вниз и вверх в воздушном зазоре между сферической и плоской границами. Для малой величины угла α длина пути вверх и вниз в воздушном зазоре примерно одинаковая. В таком случае разность хода рассматриваемых интерферирующих лучей с хорошей точностью равна удвоенной ширине воздушного зазора $2y$:

$$\Delta = 2y.$$

Кроме того, при малой величине угла α лучи отраженные двумя границами пойдут почти вертикально вверх.

Рассматривая два изображенных на рисунке пунктирных радиуса сферы и угол α между ними, получим:

$$y = R - R \cdot \cos(\alpha) = R \cdot (1 - \cos(\alpha)) \approx R \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)\right) = \frac{R\alpha^2}{2}.$$

Разность хода интерферирующих лучей вдвое больше ширины зазора $\Delta = 2y$:

$$\Delta = \alpha^2 R.$$

При отражении второго луча от плоской границы происходит отражение от оптически более плотной среды. То есть отражение происходит с потерей полуволны. С учетом потери полуволны разность хода интерферирующих лучей:

$$\Delta = \alpha^2 R + \frac{\lambda}{2}.$$

Для темной полосы с номером m разность хода равна:

$$\Delta = m\lambda + \frac{\lambda}{2}.$$

Приравнивая друг другу оба выражения для разности хода, получим равенство

$$m\lambda = \alpha^2 R,$$

из которого следует зависимость угла α от номера темной интерференционной полосы m :

$$\alpha = \sqrt{\frac{m\lambda}{R}}.$$

Из рисунка видно, что радиус соответствующего темного кольца

$$r_m \approx \alpha R \Rightarrow$$

$$r_m = \sqrt{m\lambda R} \quad \text{— радиус } m\text{-го темного интерференционного кольца}$$

Ньютона.

При $m = 0$ имеем $r_m = 0$. В точке касания плоской и сферической поверхностей находится нулевая темная полоса.

Факультативная вставка.

Есть еще две плоские поверхности, от которых отражается свет. Это верхняя граница линзы и нижняя граница плоскопараллельной пластинки.

Для любой другой пары из четырех поверхностей, кроме подробно рассмотренной ранее пары, разность хода интерферирующих волн гораздо больше. Если спектральная ширина нелазерного источника света достаточно велика, то волны, отраженные от других пар поверхностей не когерентны и не искажают интерференционную картину колец Ньютона. С лазерным источником света интерференционная картина будет сложнее.

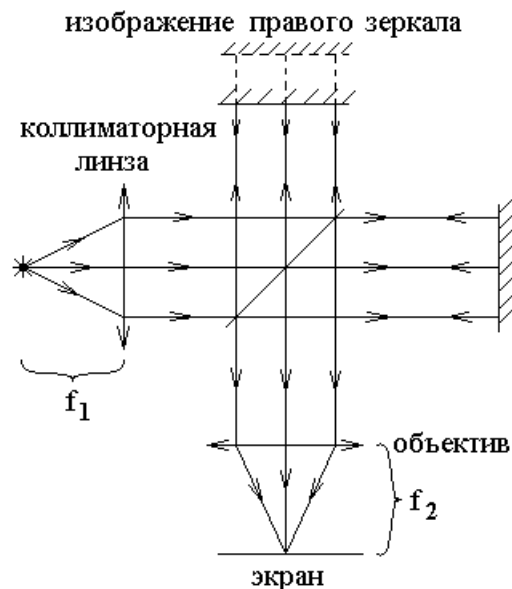
Конец факультативной вставки.

Экзамен. Полосы равного наклона в интерферометре Майкельсона.

Локализованные на бесконечности полосы равного наклона можно наблюдать в фокальной плоскости линзы (объектива).

Обычно интерферометр Майкельсона освещают параллельным пучком лучей, когда источник света расположен в фокальной плоскости линзы коллиматора.

Оптическая схема с точечным источником света изображена на нижеследующем рисунке:



На рисунке над верхним зеркалом показано изображение правого зеркала в полупрозрачной пластинке. Это изображение и верхнее зеркало образуют как бы плоскопараллельную пластинку, как бы от которой отражается свет. На экране в фокальной плоскости объектива наблюдаются полосы равного наклона в свете как бы отраженном от плоскопараллельной пластинки.

При освещении интерферометра Майкельсона параллельным пучком лучей полосы равного наклона превращаются в одну точку на экране. Мощность света в точке на экране зависит от разности расстояний от полупрозрачной пластинки до двух зеркал интерферометра.

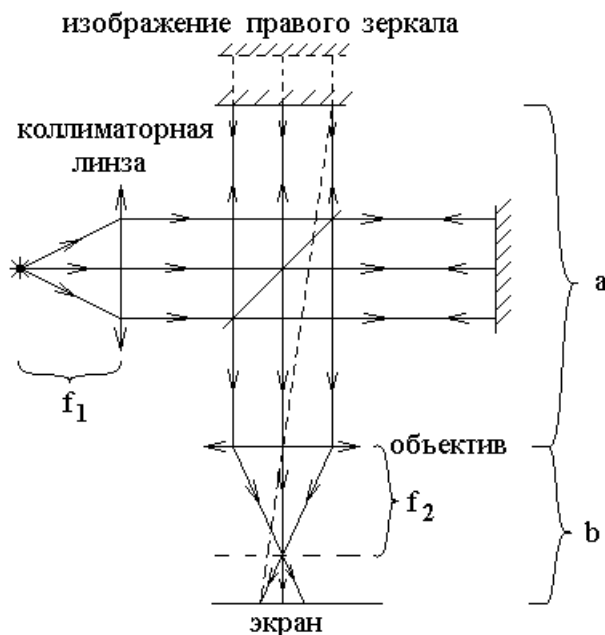
Изображение на экране не совсем точечное из-за дифракции света на линзе, как на диафрагме. Дифракционный радиус изображения $1.22 \frac{\lambda}{D} f_2$. Здесь D — диаметр пучка лучей сразу после объектива. Подробнее это будет обсуждаться при рассмотрении дифракции света.

Если одно из зеркал чуть повернуть, то два точечных изображения источника на экране разойдутся и перестанут интерферировать. Это является еще одним подтверждением того, что полосы равного наклона нельзя наблюдать на оптическом клине вместо плоскопараллельной пластинки.

Если в качестве источника света взять протяженный объект, то на экране будет изображение этого предмета, покрытое интерференционными кольцами, похожими на кольца Ньютона.

Экзамен. Полосы равной толщины в интерферометре Майкельсона.

Переместим объектив вверх вдоль лучей так, чтобы плоскость, сопряженная экрану, оказалась в области как бы плоскопараллельной пластинки зеркал.



Изображение правого зеркала в полупрозрачной пластинке и верхнее зеркало образуют как бы плоскопараллельную пластинку. На экране наблюдают полосы равной толщины в свете как бы отраженном от этой пластинки.

Условие наблюдения полос равной толщины $\frac{1}{f_2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ определяет

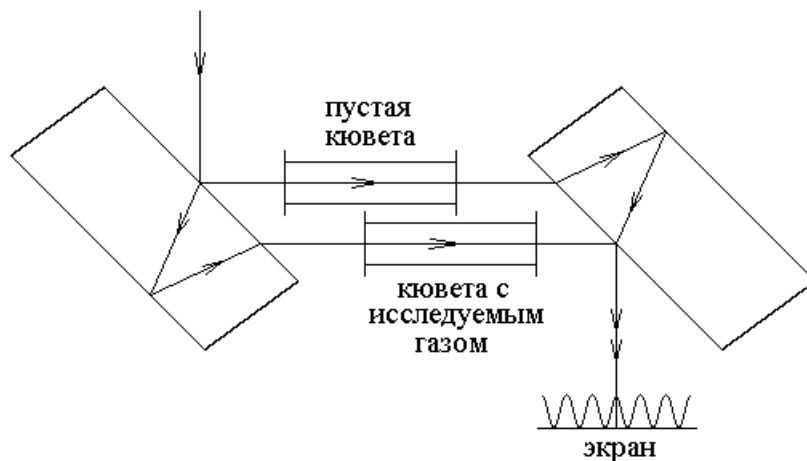
необходимое для их наблюдения расстояние b от объектива до экрана.

В отличие от полос равного наклона с точечным изображением на экране, в случае наблюдения полос равной толщины на экране видно большое пятно — изображение освещенной части верхнего зеркала. Пятно покрыто полосами равной толщины как бы оптического клина, если одно из зеркал чуть повернуто. Полосы соответствуют равной толщине оптического клина между верхним зеркалом и изображением правого зеркала.

При идеальной юстировке (настройке) зеркал ширина полос бесконечна, и пятно на экране равномерно освещено (равномерно светлое или равномерно темное).

Экзамен. Интерферометр Жамена.

Оптическая схема интерферометра Жамена приведена на нижеследующем рисунке.



Интерферометр Жамена, как и другие интерферометры, обычно используют для получения зависимости показателя преломления исследуемого газа от его давления и от длины волны света.

Пусть в каждом из двух интерферирующих лучей установлена одна из двух одинаковых кювет.

Если интерферометр Жамена освещать параллельным пучком лучей, то при идеальных плоскопараллельных пластинках весь экран будет засвечен равномерно. Если хотя бы одна из пластинок не совсем плоскопараллельна, то образуется оптический клин, и интерферирующие волны приходят на экран под небольшим углом друг к другу. Оптический клин приводит к появлению на экране интерференционных полос.

Эксперимент по измерению показателя преломления газа состоит в следующем. Сначала обе кюветы откачивают, затем в одну из кювет, например нижнюю, постепенно напускают исследуемый газ. В процессе изменения давления газа изменяется его показатель преломления и оптическая длина нижней кюветы.

Пока изменяется давление газа интерференционные полосы бегут по экрану. Нужно сосчитать, сколько интерференционных полос проходит через фиксированную точку экрана. Пусть число полос равно m , тогда оптическая длина кюветы изменяется на величину $\Delta = m\lambda$. Это с одной стороны, а с другой стороны, изменение оптической длины кюветы равно $nl - l$, где l — геометрическая длина кюветы. Тогда из равенства

$$m\lambda = l(n - 1)$$

можно экспериментально определить величину показателя преломления n .

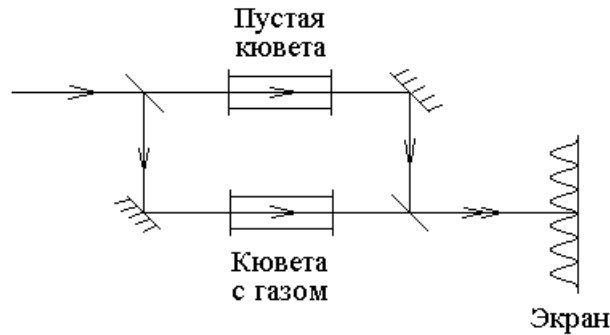
Представляет интерес, как зависимость показателя преломления от длины волны света $n(\lambda)$ или дисперсия света, так и зависимость показателя преломления от давления или концентрации N исследуемого газа для проверки

формулы Лоренц-Лорентца $\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{4}{3} \pi N \alpha$ или $\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \sim N$, здесь α —

поляризуемость молекулы или коэффициент пропорциональности между дипольным моментом молекулы и напряженностью светового поля $\vec{p} = \alpha \vec{E}$.

Экзамен. Интерферометр Рождественского (Маха — Цендера).

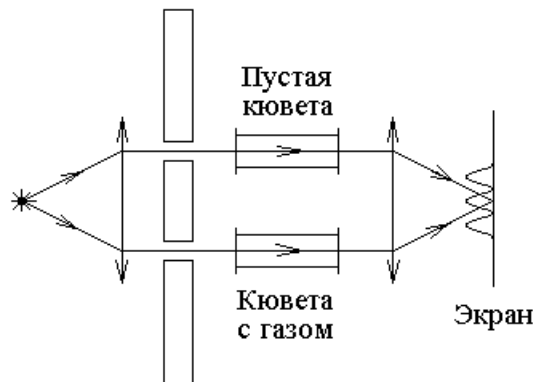
Оптическая схема интерферометра представлена на нижеследующем рисунке:



Преимущество этой схемы по сравнению с интерферометром Жамена в том, что здесь легко разместить широкие кюветы. Недостаток схемы — более сложная юстировка.

Экзамен. Интерферометр Рэлея.

Оптическая схема интерферометра представлена на рисунке:



Дифракция.

Дифракция волн — это огибание волнами препятствий.

Как и интерференцию, будем рассматривать дифракцию в вакууме.

Факультатив. Интегральная теорема Кирхгофа.

Интегральная теорема Кирхгофа позволяет выразить амплитуду светового поля в точке наблюдения через интеграл по любой поверхности, охватывающей точку наблюдения.

Рассмотрим волновое уравнение для комплексного светового поля:

$$\Delta \tilde{E} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial t^2} = 0, \text{ где } c \text{ — фазовая скорость световых волн.}$$

Пусть зависимость поля \tilde{E} от времени монохроматическая

$$\tilde{E}(t, \vec{r}) = \tilde{E}_0(\vec{r}) \cdot e^{-i\omega t}.$$

Подставим это выражение в волновое уравнение и получим уравнение Гельмгольца для пространственной зависимости $\tilde{E}_0(\vec{r})$ поля $\tilde{E}(t, \vec{r})$:

$$\Delta \tilde{E}_0 + k^2 \tilde{E}_0 = 0, \text{ где } k = \frac{\omega}{c}.$$

$\tilde{E}_0(\vec{r})$ — комплексная амплитуда комплексного светового поля $\tilde{E}(t, \vec{r})$ на частоте ω в точке с радиус-вектором \vec{r} .

Рассмотрим два любых решения уравнения Гельмгольца: $\varphi(\vec{r})$ и $\psi(\vec{r})$.

Тогда

$$\begin{cases} \Delta \varphi + k^2 \varphi = 0 \\ \Delta \psi + k^2 \psi = 0 \end{cases}.$$

Умножим первое уравнение на ψ , второе умножим на φ , и рассмотрим разность двух уравнений:

$$\psi \cdot \Delta \varphi - \varphi \cdot \Delta \psi = 0.$$

Рассмотрим

$$\operatorname{div}(\psi \cdot \vec{\nabla} \varphi - \varphi \cdot \vec{\nabla} \psi) = \operatorname{div}(\psi \cdot \vec{\nabla} \varphi) - \operatorname{div}(\varphi \cdot \vec{\nabla} \psi) = (\vec{\nabla}, \psi \vec{\nabla} \varphi) - (\vec{\nabla}, \varphi \vec{\nabla} \psi).$$

Каждое из двух слагаемых раскроем, как производную от произведения и получим:

$$\begin{aligned} &= (\vec{\nabla} \psi, \vec{\nabla} \varphi) + \psi (\vec{\nabla}, \vec{\nabla} \varphi) - (\vec{\nabla} \varphi, \vec{\nabla} \psi) - \varphi (\vec{\nabla}, \vec{\nabla} \psi) = \\ &= \psi \cdot \Delta \varphi - \varphi \cdot \Delta \psi = 0 \end{aligned}$$

Последнее равенство нулю доказано семью строками выше.

$$\text{Итак } \operatorname{div}(\psi \cdot \vec{\nabla} \varphi - \varphi \cdot \vec{\nabla} \psi) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$0 = \int_V \operatorname{div}(\psi \cdot \vec{\nabla} \varphi - \varphi \cdot \vec{\nabla} \psi) \cdot dV = \oint_S ((\psi \cdot \vec{\nabla} \varphi - \varphi \cdot \vec{\nabla} \psi), d\vec{S}), \quad \text{где последнее}$$

равенство — это теорема Гаусса-Остроградского, примененная к векторному полю $(\psi \cdot \vec{\nabla} \varphi - \varphi \cdot \vec{\nabla} \psi)$. Далее

$$\oint_S ((\psi \cdot \vec{\nabla} \varphi - \varphi \cdot \vec{\nabla} \psi), d\vec{S}) = \oint_S (\psi (\vec{\nabla} \varphi, d\vec{S}) - \varphi (\vec{\nabla} \psi, d\vec{S})).$$

Заметим, что

$$(\vec{\nabla} \varphi, d\vec{S}) = (\vec{\nabla} \varphi)_{d\vec{S}} \cdot d\vec{S} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \cdot dS, \quad \text{где } \vec{n} \text{ — внешняя нормаль поверхности}$$

S . Тогда

$$\oint_S (\psi (\vec{\nabla} \varphi, d\vec{S}) - \varphi (\vec{\nabla} \psi, d\vec{S})) = \oint_S \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) \cdot dS = 0.$$

Последнее равенство

$$\oint_S \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) \cdot dS = 0 \quad (1)$$

нулю определяется тем, что десятью строками выше мы начали рассмотрение цепочки равенств с нуля.

Подставим в равенство (1) $\oint_S \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) \cdot dS = 0$ функции φ и ψ в

виде:

$$\begin{cases} \varphi = \tilde{E}_0(\vec{r}) \\ \psi = \frac{e^{ikr}}{r} \end{cases}, \text{ где } \tilde{E}_0(\vec{r}) \text{ — комплексная амплитуда светового поля.}$$

Чтобы иметь право подставить обе функции в равенство (1)

$\oint_S \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) \cdot dS = 0$ необходимо, чтобы обе функции удовлетворяли

уравнению Гельмгольца:

$$\begin{cases} \Delta \varphi + k^2 \varphi = 0 \\ \Delta \psi + k^2 \psi = 0 \end{cases}.$$

Комплексная амплитуда светового поля $\tilde{E}_0(\vec{r})$ удовлетворяет уравнению

Гельмгольца

$$\Delta \tilde{E}_0 + k^2 \tilde{E}_0 = 0,$$

так как само световое поле $\tilde{E}(t, \vec{r})$ удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta \tilde{E} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial t^2} = 0$$

и мы хотим рассмотреть монохроматическое световое поле в виде

$$\tilde{E}(t, \vec{r}) = \tilde{E}_0(\vec{r}) \cdot e^{-i\omega t}.$$

Покажем теперь, что функция $\psi = \frac{e^{ikr}}{r}$ тоже удовлетворяет уравнению

Гельмгольца. Функция $\psi = \frac{e^{ikr}}{r}$ имеет сферическую симметрию, поэтому

проверку удобно проводить в сферической системе координат, где оператор Лапласа имеет следующий вид:

$$\Delta \psi = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2}.$$

Функция $\psi = \frac{e^{ikr}}{r}$ зависит только от координаты r . В таком случае нужно

рассмотреть только производные по r .

$$\Delta\psi = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \quad \Rightarrow$$

$$\Delta\psi = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right) = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \left(-\frac{e^{ikr}}{r^2} + ik \frac{e^{ikr}}{r} \right) \right) = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(-e^{ikr} + ikr \cdot e^{ikr} \right) =$$

$$= \frac{1}{r^2} \cdot \left(-ik \cdot e^{ikr} + \left(ik \cdot e^{ikr} - k^2 r \cdot e^{ikr} \right) \right) = -k^2 \cdot \frac{e^{ikr}}{r} = -k^2 \psi$$

Сравнивая начало и конец цепочки равенств, получим

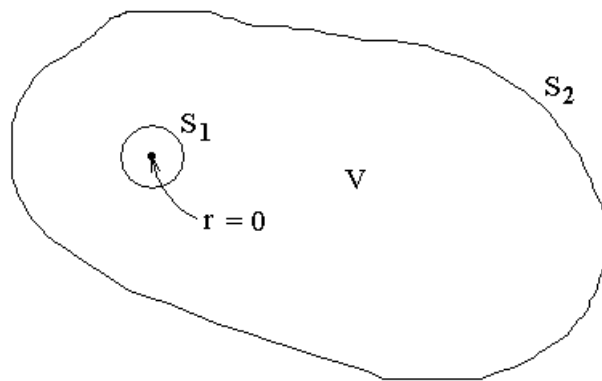
$$\Delta\psi + k^2\psi = 0 \quad \text{— уравнение Гельмгольца для функции } \psi.$$

Подставим $\begin{cases} \varphi = \tilde{E}_0(\vec{r}) \\ \psi = \frac{e^{ikr}}{r} \end{cases}$ в равенство (1) $\oint_S \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) \cdot dS = 0$ и получим

$$\oint_S \left(\frac{e^{ikr}}{r} \cdot \frac{\partial \tilde{E}_0(\vec{r})}{\partial n} - \tilde{E}_0(\vec{r}) \cdot \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right) \cdot dS = 0 \quad (2)$$

Теорема Гаусса-Остроградского, на основе которой были получены равенства (1) и (2), справедлива только в том случае, если подынтегральная функция не имеет особых точек в объеме V , то есть не обращается в бесконечность ни в одной точке объема V . Поэтому из объема, ограниченного поверхностью S нужно исключить точку $r=0$, в которой функция $\psi = \frac{e^{ikr}}{r}$ обращается в бесконечность.

Будем считать, что граница S объема V двусвязная и состоит из двух односвязных поверхностей S_1 и S_2 .



Здесь S_1 — малая сфера с центром в точке $r=0$.

Если в равенстве (2) \vec{n} — внешняя нормаль объема V , то

$$\oint_{S_1} + \oint_{S_2} = 0.$$

Если же в равенстве (2) \vec{n} — внешняя нормаль поверхностей S_1 и S_2 , то

$$-\oint_{S_1} + \oint_{S_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \oint_{S_1} = \oint_{S_2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\oint_{S_1} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \cdot \frac{\partial \tilde{E}_0(\vec{r})}{\partial n} - \tilde{E}_0(\vec{r}) \cdot \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right) \cdot dS = \oint_{S_2} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \cdot \frac{\partial \tilde{E}_0(\vec{r})}{\partial n} - \tilde{E}_0(\vec{r}) \cdot \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right) \cdot dS$$

Рассмотрим подробнее \oint_{S_1} — интеграл по малой сфере.

$$\begin{aligned} \oint_{S_1} &= \oint_{S_1} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \cdot \frac{\partial \tilde{E}_0(\vec{r})}{\partial n} - \tilde{E}_0(\vec{r}) \cdot \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right) \cdot dS = \\ &= \oint_{S_1} \frac{e^{ikr}}{r} \cdot \frac{\partial \tilde{E}_0(\vec{r})}{\partial n} \cdot dS - \oint_{S_1} \tilde{E}_0(\vec{r}) \cdot \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \cdot dS \approx \\ &\approx \frac{e^{ikr}}{r} \cdot \oint_{S_1} \frac{\partial \tilde{E}_0(\vec{r})}{\partial n} \cdot dS - \tilde{E}_0(\vec{r}) \cdot \oint_{S_1} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \cdot dS \end{aligned}$$

В последнем равенстве из первого интеграла вынесен сомножитель $\frac{e^{ikr}}{r}$, так как он постоянен на поверхности сферы с постоянным радиусом r . Из второго интеграла вынесен сомножитель $\tilde{E}_0(\vec{r})$, так как он почти постоянен для сферы малого радиуса.

Рассмотрим первое слагаемое $\frac{e^{ikr}}{r} \cdot \oint_{S_1} \frac{\partial \tilde{E}_0(\vec{r})}{\partial n} \cdot dS$ в получившемся

выражении. Здесь подынтегральное выражение $\frac{\partial \tilde{E}_0(\vec{r})}{\partial n}$ ограничено, так как

$\tilde{E}_0(\vec{r})$ не имеет особенности при $r = 0$. Площадь сферы $S_1 = 4\pi r^2 \sim r^2$. Тогда и

весь интеграл $\oint_{S_1} \frac{\partial \tilde{E}_0(\vec{r})}{\partial n} \cdot dS$ ограничен слагаемым пропорциональным r^2 с

учетом ограниченности подынтегрального выражения. При малых значениях

величины r сомножитель перед интегралом $\frac{e^{ikr}}{r}$ примерно пропорционален $\frac{1}{r}$,

и все выражение с первым интегралом стремится к нулю:

$$\frac{e^{ikr}}{r} \cdot \oint_{S_1} \frac{\partial \tilde{E}_0(\vec{r})}{\partial n} \cdot dS \sim r \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0.$$

Рассмотрим теперь второе слагаемое в выражении

$$\frac{e^{ikr}}{r} \cdot \oint_{S_1} \frac{\partial \tilde{E}_0(\vec{r})}{\partial n} \cdot dS - \tilde{E}_0(\vec{r}) \cdot \oint_{S_1} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \cdot dS, \text{ а именно:}$$

$$-\tilde{E}_0(\vec{r}) \cdot \oint_{S_1} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \cdot dS.$$

Здесь сомножитель перед интегралом $\tilde{E}_0(\vec{r}) \approx \tilde{E}_0(0)$ — это амплитуда светового поля в точке $r = 0$, а $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r}$. Тогда

$$-\tilde{E}_0(\vec{r}) \cdot \oint_{S_1} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \cdot dS = -\tilde{E}_0(0) \oint_{S_1} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \cdot dS = -\tilde{E}_0(0) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \cdot \oint_{S_1} dS$$

В последнем выражении при малых значениях r получим $\frac{e^{ikr}}{r} \approx \frac{1}{r}$. Тогда

$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \approx -\frac{1}{r^2}$. Следовательно, два интеграла можно заменить одним вторым

интегралом и получить

$$-\tilde{E}_0(\vec{r}) \cdot \oint_{S_1} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \cdot dS \approx -\tilde{E}_0(0) \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \cdot \oint_{S_1} dS \approx$$

$$\approx -\tilde{E}_0(0) \cdot \left(-\frac{1}{r^2} \right) \cdot \oint_{S_1} dS = \tilde{E}_0(0) \cdot \frac{1}{r^2} \cdot 4\pi \cdot r^2 = 4\pi \tilde{E}_0(0).$$

Тогда из равенства интегралов по двум поверхностям $\oint_{S_1} = \oint_{S_2}$ и

равенства первого интеграла величине $4\pi \tilde{E}_0$ получаем:

$$\tilde{E}_0(0) = \frac{1}{4\pi} \cdot \oint_{S_2} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \cdot \frac{\partial \tilde{E}_0(\vec{r})}{\partial n} - \tilde{E}_0(\vec{r}) \cdot \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right) \cdot dS.$$

Здесь \vec{n} — внешняя нормаль поверхности S_2 . Заменяем ее на внутреннюю нормаль, а появляющийся при этом знак минус компенсируем переменной мест подынтегральных слагаемых. Поскольку в рассмотрении осталась только поверхность S_2 переобозначим $S_2 \rightarrow S$ и получим интегральную теорему Кирхгофа в окончательном виде:

$$\tilde{E}_0(0) = \frac{1}{4\pi} \cdot \oint_S \left(\tilde{E}_0(\vec{r}) \cdot \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) - \frac{e^{ikr}}{r} \cdot \frac{\partial \tilde{E}_0(\vec{r})}{\partial n} \right) \cdot dS, \quad (3)$$

где \vec{n} — внутренняя нормаль замкнутой поверхности S , и точка $r = 0$ расположена внутри этой замкнутой поверхности.

Экзамен. Скалярная теория дифракции Кирхгофа.

При рассмотрении предыдущего вопроса мы сознательно не писали значка вектора у напряженности электрического поля $\vec{E}(t, \vec{r})$ и у амплитуды напряженности $\vec{E}_0(\vec{r})$.

Теория дифракции Кирхгофа называется скалярной, чтобы подчеркнуть ее нестрогость в применении к рассмотрению дифракции светового поля.

Строгая теория дифракции векторных электромагнитных волн оказалась крайне неудобной для практических расчетов. Эту теорию можно найти в книге:

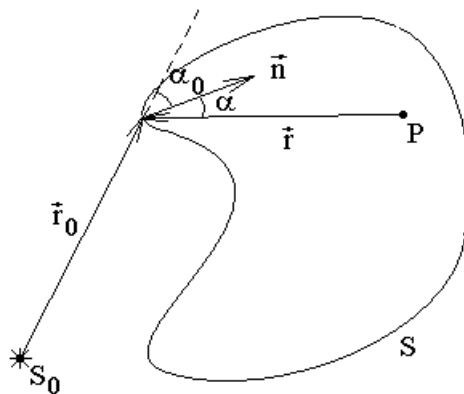
А. Дж. Стрэттон. Теория электромагнетизма. М.; Л.: ОГИЗ, 1948. С.409.

В обсуждаемой ниже теории Кирхгофа рассматривают точечный источник света, излучающий сферически симметричные волны с комплексной амплитудой вида:

$$\vec{E}_0(\vec{r}_0) = A_0 \frac{e^{ikr_0}}{r_0},$$

где \vec{r}_0 — вектор, проведенный из точечного источника света в точку наблюдения. На самом деле электромагнитные волны поперечны, а поперечные волны не могут быть сферически симметричны. Вместо сферически симметричного поля надо было бы рассматривать поле излучающего диполя.

Итак, пусть источником света является один точечный сферически симметричный источник S_0 . Нас будет интересовать световое поле в точке наблюдения P . Точку наблюдения охватывает замкнутая поверхность S такая, что источник света S_0 расположен снаружи поверхности S .



Введем необходимые обозначения:

\vec{r} — радиус-вектор из точки наблюдения P в точку на поверхности S ,

\vec{r}_0 — радиус-вектор из источника света S_0 в точку на поверхности S ,

\vec{n} — внутренняя нормаль поверхности S .

α_0 и α — углы, на которые свет поворачивает от источника к внутренней нормали и от внутренней нормали к точке наблюдения. Другими словами:

$\alpha_0 \equiv (\vec{n}, \vec{r}_0)$ — угол между нормалью к поверхности и вектором,

направленным от источника света S_0 в точку на поверхности S .

$\alpha \equiv (\widehat{\vec{n}, -\vec{r}})$ — угол между нормалью к поверхности и вектором, направленным из точки поверхности S в точку наблюдения P .

В формулу (3) рассмотренной раньше интегральной теоремы Кирхгофа

$$\tilde{E}_0(0) = \frac{1}{4\pi} \cdot \oint_S \left(\tilde{E}_0(\vec{r}) \cdot \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) - \frac{e^{ikr}}{r} \cdot \frac{\partial \tilde{E}_0(\vec{r})}{\partial n} \right) \cdot dS$$

подставим поле точечного сферически симметричного источника света

$$\tilde{E}_0(\vec{r}_0) = A_0 \frac{e^{ikr_0}}{r_0}$$

и получим

$$\tilde{E}_0(0) = \tilde{E}_P = \frac{A_0}{4\pi} \cdot \oint_S \left(\frac{e^{ikr_0}}{r_0} \cdot \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) - \frac{e^{ikr}}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr_0}}{r_0} \right) \right) \cdot dS.$$

Функция $\frac{e^{ikr}}{r}$ зависит только от r , поэтому градиент этой функции направлен вдоль вектора \vec{r} , и длина градиента равна модулю производной от функции по r . Производная от функции по любому направлению может быть выражена через производную по r , умноженную на косинус угла между \vec{r} и направлением дифференцирования. В нашем случае направление дифференцирования \vec{n} — это направление внутренней нормали к поверхности S . Рассмотрим этот косинус

$$\cos(\vec{n}, \vec{r}) = -\cos(\vec{n}, -\vec{r}) = -\cos(\alpha)$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) = \frac{d}{dr} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \cdot (-\cos(\alpha)) = \left(ik \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{1}{r^2} e^{ikr} \right) \cdot (-\cos(\alpha)).$$

В последнем равенстве подставлена производная от произведения e^{ikr} на $\frac{1}{r}$. Длина волны мала по сравнению с любыми расстояниями. Тогда

$$r \gg \lambda \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r} \ll k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r^2} \ll \frac{k}{r}.$$

Следовательно, второе слагаемое в выражении производной по нормали можно отбросить. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \approx -ik \frac{e^{ikr}}{r} \cos(\alpha).$$

Аналогично

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr_0}}{r_0} \right) = \frac{d}{dr_0} \left(\frac{e^{ikr_0}}{r_0} \right) \cdot \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{r}_0}) =$$

$$= \frac{d}{dr_0} \left(\frac{e^{ikr_0}}{r_0} \right) \cdot \cos(\alpha_0) = \left(ik \frac{e^{ikr_0}}{r_0} - \frac{1}{r_0^2} e^{ikr_0} \right) \cdot \cos(\alpha_0).$$

С учетом $r_0 \gg \lambda$ можно отбросить второе слагаемое и получить

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr_0}}{r_0} \right) \approx ik \frac{e^{ikr_0}}{r_0} \cdot \cos(\alpha_0).$$

Подставим выражения производных по нормали

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \approx -ik \frac{e^{ikr}}{r} \cos(\alpha) \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr_0}}{r_0} \right) \approx ik \frac{e^{ikr_0}}{r_0} \cdot \cos(\alpha_0) \quad \text{в интеграл по}$$

поверхности S и получим:

$$\begin{aligned} E_P &= \frac{A_0}{4\pi} \cdot \oint_S \left(\frac{e^{ikr_0}}{r_0} \cdot \left(-ik \frac{e^{ikr}}{r} \cos(\alpha) \right) - \frac{e^{ikr}}{r} \cdot \left(ik \frac{e^{ikr_0}}{r_0} \cdot \cos(\alpha_0) \right) \right) \cdot dS = \\ &= -\frac{A_0}{4\pi} \cdot \oint_S \left(\frac{e^{ikr_0}}{r_0} \cdot ik \frac{e^{ikr}}{r} \cos(\alpha) + \frac{e^{ikr}}{r} \cdot ik \frac{e^{ikr_0}}{r_0} \cdot \cos(\alpha_0) \right) \cdot dS \\ &= -\frac{A_0 ik}{4\pi} \cdot \oint_S \frac{e^{ikr_0}}{r_0} \frac{e^{ikr}}{r} (\cos(\alpha) + \cos(\alpha_0)) dS. \end{aligned}$$

В этом выражении заменим обратно сферически симметричную волну точечного источника $A_0 \frac{e^{ikr_0}}{r_0}$ на $\tilde{E}_0(\vec{r}_0)$. И будем считать, что поле с амплитудой $\tilde{E}_0(\vec{r}_0)$ не обязательно создано точечным источником. Это можно сделать, если считать, что любое световое поле с любым распределением амплитуды $\tilde{E}_0(\vec{r}_0)$ можно представить, как совокупность излучений $A_0 \frac{e^{ikr_0}}{r_0}$ точечных источников. Строго говоря, это не справедливо, хотя бы потому, что вместо сферически симметричного излучения точечного источника логичнее рассматривать излучение точечного электрического диполя. Тем не менее, вслед за Кирхгофом получим

$$\tilde{E}_P = -\frac{ik}{4\pi} \oint_S \tilde{E}_0(\vec{r}) \frac{e^{ikr}}{r} (\cos(\alpha) + \cos(\alpha_0)) dS.$$

Подставим сюда $\frac{k}{4\pi} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{1}{2\lambda}$ и получим окончательное выражение

$$\tilde{E}_P = -\frac{i}{2\lambda} \oint_S \tilde{E}_0(\vec{r}) \frac{e^{ikr}}{r} (\cos(\alpha_0) + \cos(\alpha)) dS. \quad (4)$$

Эта формула представляет поле в точке наблюдения P , как сумму полей вторичных источников света, расположенных на поверхности S замкнутой вокруг точки наблюдения P .

Проанализируем амплитуду излучения каждого вторичного источника света в точке наблюдения P .

Амплитуда пропорциональна площади излучающей площадки dS , комплексной амплитуде поля $\tilde{E}_0(\vec{r})$ в точке вторичного источника и обратно-пропорциональна $\sim \frac{1}{r}$ расстоянию r от вторичного источника до точки

наблюдения P . Зависимость амплитуды от расстояния вида $\sim \frac{1}{r}$ хорошо согласуется с тем фактом, что через любую сферу проходит одинаковая энергия, тогда интенсивность спадает с расстоянием обратно-пропорционально площади сферы $\sim \frac{1}{r^2}$, а амплитуда ведет себя, как корень из интенсивности

$\sim \frac{1}{r}$. Амплитуда в точке P имеет фазовый множитель e^{ikr} , который определяется запаздыванием фазы на величину $kr = 2\pi \frac{r}{\lambda}$ в точке наблюдения

относительно фазы вторичного источника. Кроме того, амплитуда вторичного источника пропорциональна сомножителю

$$-\frac{i}{2\lambda} \cdot (\cos(\alpha_0) + \cos(\alpha)),$$

который называют коэффициентом наклона. Коэффициент наклона описывает зависимость излучательной способности вторичного источника света от направления волны пришедшей ко вторичному источнику и от направления волны ушедшей от вторичного источника.

Вторичный источник света назад не излучает, то есть при условии

$$\alpha_0 + \alpha = \pi \quad \text{получаем} \quad \cos(\alpha_0) + \cos(\alpha) = 0$$