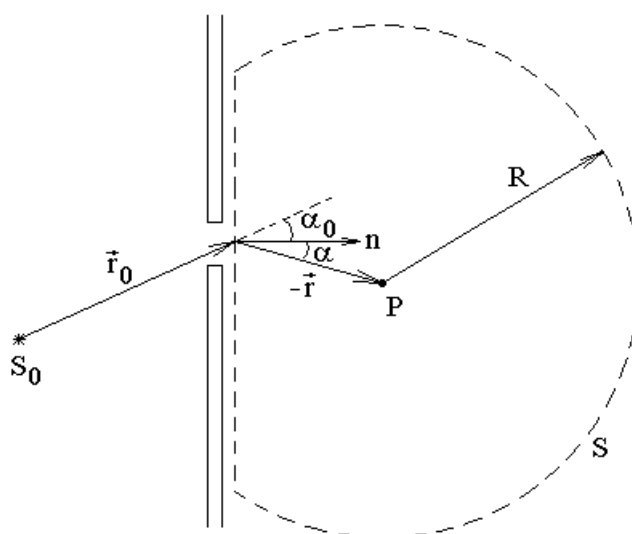


Экзамен. Применение теории Кирхгофа к дифракции света на отверстиях произвольной формы в плоском экране.



$$\tilde{E}_P = -\frac{i}{2\lambda} \oint_S \tilde{E}_0(\vec{r}) \cdot \frac{e^{ikr}}{r} \cdot (\cos(\alpha_0) + \cos(\alpha)) \cdot dS$$

В качестве охватывающей точку наблюдения P поверхности S выберем сферу с радиусом R и центром в точке P . Часть сферы, которая находится до экрана, с другой стороны экрана от точки наблюдения, заменим плоскостью, расположенной вплотную к экрану со стороны точки наблюдения P .

Мысленно разобьем поверхность S на три части:

$S = S_1 + S_2 + S_3$, где

S_1 — поверхность оставшейся справа от экрана части сферы,

S_2 — плоская поверхность, примыкающая непосредственно к экрану,

S_3 — поверхность отверстия в экране.

Согласно Кирхгофу интеграл нужно брать только по поверхности S_3 , так как оба других интеграла стремятся к нулю, по крайней мере, при стремлении радиуса сферы R к бесконечности.

$\int_{S_2} \rightarrow 0$, так как световое поле за непрозрачным экраном очень мало.

Факультативная вставка.

Сложнее показать, что $\int_{S_1} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$. Это происходит только благодаря

сомножителю в виде коэффициента наклона. И действительно, с одной стороны, на большом расстоянии R от отверстия амплитуда \tilde{E}_0 поля вторичных источников на поверхности сферы спадает с расстоянием $\tilde{E}_0 \sim \frac{1}{R}$, и

сомножитель $\frac{e^{ikr}}{r}$ в подынтегральном выражении спадает, как $\sim \frac{1}{R}$, так как

$r = R$, но с другой стороны, площадь поверхности сферы растет $S \sim R^2$. Поэтому, казалось бы, интеграл должен стремиться к константе. Этого не происходит из-за коэффициента наклона. Для большого радиуса сферы R свет приходит к поверхности сферы почти вдоль радиуса и излучается вторичным источником в точку P обратно вдоль радиуса сферы. Вторичный источник света назад не излучает, так как при излучении назад $\cos(\alpha_0) + \cos(\alpha) = 0$.

Можно обсудить условие $\cos(\alpha_0) + \cos(\alpha) \approx 0$ подробнее. Для вторичных источников на поверхности сферы $\alpha \equiv (\widehat{\vec{n}, -\vec{r}}) = 0$, и, следовательно, $\cos(\alpha) = 1$.

На поверхности сферы $\cos(\alpha_0) = \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{r}_0}) = -\cos(\widehat{-\vec{n}, \vec{r}_0})$, где $(-\vec{n})$ — внешняя нормаль к сфере, угол $(\widehat{-\vec{n}, \vec{r}_0})$ на поверхности сферы очень мал при больших значениях R .

Тогда

$$\cos(\alpha_0) = -\cos(\widehat{-\vec{n}, \vec{r}_0}) = -\cos(\pi - \alpha_0) \approx -\left(1 - \frac{(\pi - \alpha_0)^2}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\cos(\alpha) + \cos(\alpha_0) \approx 1 - \left(1 - \frac{(\pi - \alpha_0)^2}{2}\right) = \frac{(\pi - \alpha_0)^2}{2}.$$

При больших значениях R угол $(\pi - \alpha_0)$ — мал: $\pi - \alpha_0 \sim \frac{1}{R}$. Тогда

$$\cos(\alpha) + \cos(\alpha_0) \sim \frac{1}{R^2}.$$

Учитывая, что $E_0 \sim \frac{1}{R}$, $S \sim R^2$, $\cos(\alpha) + \cos(\alpha_0) \sim \frac{1}{R^2}$, получим

$$\int_{S_1} \sim \frac{1}{R^2} \cdot R^2 \cdot \frac{1}{R^2} \sim \frac{1}{R^2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

В результате интегралы по поверхностям S_1 и S_2 малы, и ими можно пренебречь.

Конец факультативной вставки.

По теории Кирхгофа для дифракции на отверстии в плоском экране достаточно суммировать излучение вторичных источников только по поверхности отверстия по формуле

$$\tilde{E}_P = -\frac{i}{2\lambda} \int_S \tilde{E}_0(\vec{r}) \cdot \frac{e^{ikr}}{r} \cdot (\cos(\alpha_0) + \cos(\alpha)) \cdot dS.$$

Здесь $\tilde{E}_0(\vec{r})$ — комплексная амплитуда светового поля в плоскости отверстия,

\vec{r} — вектор из точки наблюдения P в точку вторичных источников на поверхности отверстия,

α_0 — угол между лучом, пришедшим к отверстию, и нормалью к экрану \vec{n} ,

α — угол между нормалью к экрану \vec{n} и направлением $(-\vec{r})$ от вторичного источника к точке наблюдения.

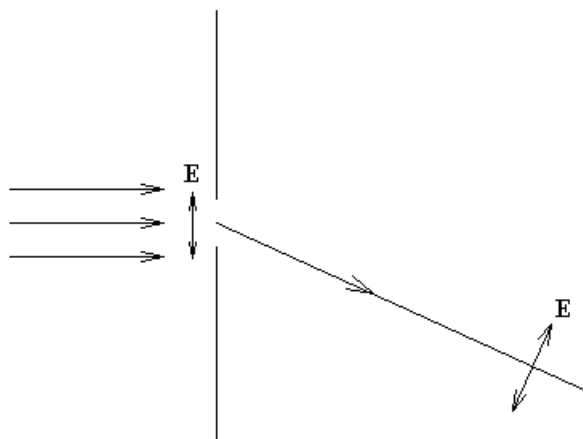
Заметим, что оба угла α_0 и α — острые углы, так как \vec{n} — нормаль к экрану в направлении распространения света.

Во многих практически важных случаях световая волна падает на экран перпендикулярно экрану. Тогда $\alpha_0 = 0 \Rightarrow \cos(\alpha_0) = 1 \Rightarrow$

$-\frac{i}{2\lambda}(1 + \cos(\alpha))$ — коэффициент наклона, при нормальном падении света на экран, α — угол поворота света на вторичном источнике.

Факультатив. Трудности теории дифракции Кирхгофа.

Пусть свет падает перпендикулярно отверстию, и свет имеет линейную поляризацию в плоскости рисунка.



В падающем на экран свете нет горизонтальной составляющей напряженности поля E , так как световое поле поперечно. Свет, ушедший далеко от отверстия вправо, тоже должен быть поперечен. Поэтому в дифрагированном свете должна появиться горизонтальная составляющая поля E .

Это с одной стороны, а с другой стороны для каждой проекции поля E можно применить интеграл Кирхгофа.

Применим интеграл Кирхгофа для горизонтальной составляющей поля E . В падающей волне нет горизонтальной составляющей поля E , тогда ей неоткуда появиться и в дифрагированной волне, которую можно найти, как интеграл Кирхгофа по плоскости отверстия.

Эти трудности связаны с тем, что в теории не учитывается характер взаимодействия светового поля с экраном. Видимо, нельзя пренебречь излучением края отверстия и излучением от задней стенки экрана.

Факультатив. Теория дифракции Френеля. Построения Гюйгенса.

До создания скалярной теории Кирхгофа Френелем была разработана своя теория дифракции.

В основе теории Френеля лежит принцип Гюйгенса-Френеля. Рассматривается дифракция монохроматических световых волн, иначе нет определенной длины волны λ , и волновое число $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ не имеет смысла.

Согласно этому принципу каждый участок фронта световой волны является вторичным источником волн. В точке наблюдения складываются комплексные амплитуды световых волн, пришедших от различных вторичных источников.

Амплитуда света, пришедшего от вторичного источника пропорциональна площади вторичного источника, пропорциональна амплитуде светового поля в области вторичного источника и обратно-пропорциональна расстоянию от вторичного источника до точки наблюдения. Кроме того, свет в точке наблюдения должен иметь множитель e^{ikr} , который отражает запаздывание по фазе на величину kr фазы в точке наблюдения относительно фазы вторичного источника.

Все это соответствует более поздней и более строгой скалярной теории Кирхгофа. Можно сказать, что теория Кирхгофа является обоснованием теории Френеля. Дело в том, что все перечисленные выше свойства света, приходящего от вторичного источника в точку наблюдения, в теории Френеля были просто бездоказательной догадкой.

В теории Френеля не было коэффициента наклона, хотя Френель и догадывался, что какая-то зависимость излучения вторичного источника от направления должна быть. Френель рассматривал вторичные источники только на поверхности равной фазы, а не на любой замкнутой поверхности вокруг точки наблюдения, как в теории Кирхгофа.

Название принципа Гюйгенса-Френеля связано с тем, что до теории Френеля огибание светом препятствий объяснялось с помощью построений Гюйгенса. В теме "Кристаллооптика" мы рассматривали эти построения факультативно. Согласно построениям Гюйгенса каждая точка фронта волны является вторичным источником света. Новое положение фронта световой волны через некоторый промежуток времени τ может быть получено, как граница множества точек, до которых достигает свет от любой из точек старого фронта волны за рассматриваемое время τ .

Экзамен. Зоны Френеля.

Зоны Френеля полезны только при рассмотрении дифракции в задаче с осевой симметрией, когда на одной оси находятся источник света, круглое отверстие в непрозрачном экране и точка наблюдения.

Зоны Френеля — это кольца, на которые мысленно разбивают плоскость отверстия со вторичными источниками света. В дополнение к определению

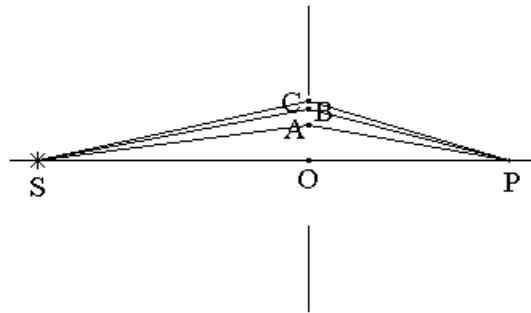
зоны Френеля требуется, чтобы разность хода лучей, идущих через внешний и внутренний край кольца зоны Френеля, была бы равна $\frac{\lambda}{2}$.

Е. И. Бутиков в своей основополагающей для нас книге "Оптика" предлагает разбивать на зоны Френеля не поверхность отверстия, а поверхность равных фаз — сферу с центром в источнике света, точнее часть сферы, которая опирается на край отверстия. Это больше соответствует теории Френеля, но дает менее точный результат.

Мы будем разбивать на зоны Френеля плоскость отверстия.

Радиусом зоны Френеля называют внешний радиус кольца.

Пусть OA, OB, OC — радиусы зон Френеля.



Если r_m — радиус m -ой зоны Френеля, то

$$\begin{cases} OA = r_1 \\ OB = r_2 \\ OC = r_3 \\ \vdots \end{cases}$$

По определению зоны Френеля разность хода лучей, идущих через внешний и внутренний край кольца зоны Френеля, равна $\frac{\lambda}{2}$. Тогда

$$\left. \begin{aligned} (SA + AP) - (SO + OP) &= \frac{\lambda}{2} \\ (SB + BP) - (SA + AP) &= \frac{\lambda}{2} \\ (SC + CP) - (SB + BP) &= \frac{\lambda}{2} \\ \vdots & \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} (SA + AP) - (SO + OP) &= 1 \frac{\lambda}{2} \\ (SB + BP) - (SO + OP) &= 2 \frac{\lambda}{2} \\ (SC + CP) - (SO + OP) &= 3 \frac{\lambda}{2} \\ \vdots & \end{aligned} \right\}$$

Пусть $r_m = OM$ — радиус m -ой зоны Френеля. Тогда

$$(SM + MP) - (SO + OP) = m \frac{\lambda}{2}.$$

Обозначим

$L_1 \equiv SO$ — расстояние от источника света до отверстия,

$L_2 \equiv OP$ — расстояние от отверстия до точки наблюдения.

Тогда

$$\left(\sqrt{L_1^2 + r_m^2} + \sqrt{L_2^2 + r_m^2} \right) - (L_1 + L_2) = m \frac{\lambda}{2}.$$

Будем рассматривать зоны Френеля только с малыми номерами, когда выполняются приближения парааксиальной оптики, то есть $r_m \ll L_i$. Тогда

$$\sqrt{L_1^2 + r_m^2} = L_1 \sqrt{1 + \frac{r_m^2}{L_1^2}} \approx L_1 \left(1 + \frac{r_m^2}{2L_1^2} \right) = L_1 + \frac{r_m^2}{2L_1}.$$

Аналогично

$$\sqrt{L_2^2 + r_m^2} \approx L_2 + \frac{r_m^2}{2L_2}.$$

Подставим в равенство

$$\left(\sqrt{L_1^2 + r_m^2} + \sqrt{L_2^2 + r_m^2} \right) - (L_1 + L_2) = m \frac{\lambda}{2}$$

и получим

$$\left(L_1 + \frac{r_m^2}{2L_1} \right) + \left(L_2 + \frac{r_m^2}{2L_2} \right) - (L_1 + L_2) = m \frac{\lambda}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{r_m^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) = m \frac{\lambda}{2} \quad \Rightarrow$$

$$r_m = \sqrt{m\lambda \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}} \quad \text{— внешний радиус } m\text{-ой зоны Френеля.}$$

В частном случае, когда на экран падает плоская волна, можно считать, что источник волны находится бесконечно далеко $L_1 = \infty \Rightarrow$

$$r_m = \sqrt{m\lambda L_2}.$$

Если в формуле отсутствует расстояние L_1 , то L_2 можно переобозначить за L . Тогда

$r_m = \sqrt{m\lambda L}$ — радиус m -ой зона Френеля для плоской падающей волны.

Экзамен. Векторные диаграммы для зон Френеля.

Зоны Френеля имеют примерно одинаковые площади. И действительно

$$S_m = \pi r_m^2 - \pi r_{m-1}^2 = \pi \left(m\lambda \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} - (m-1)\lambda \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \right) = \pi\lambda \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}.$$

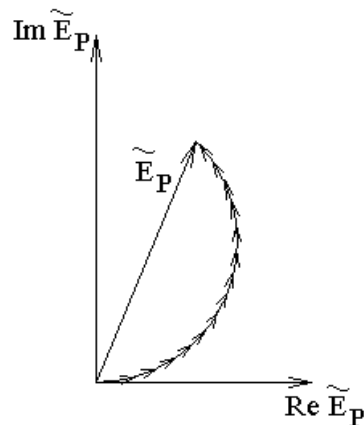
Здесь правая часть равенства не зависит от m , значит и площади зон Френеля S_m не зависят от m .

Разобьем отверстие на более мелкие кольца. Пусть кольца такие, что разность хода для двух лучей, проходящих через внешнюю и внутреннюю границы кольца, одна и та же для любого кольца. Тогда площади колец будут одинаковы. Это можно доказать, рассуждая аналогично рассмотрению зон Френеля.

Одинаковые разности хода эквивалентны одинаковым разностям фаз, так как

$$\frac{\Delta}{\lambda} = \frac{\delta\varphi}{2\pi}.$$

Сдвиг фазы — это поворот комплексной амплитуды на комплексной плоскости. То есть векторные вклады от разных колец будут развернуты на одинаковые углы на комплексной плоскости. Длины этих векторов будут одинаковы, так как одинаковы площади колец вторичных источников. Следовательно, эти векторы будут лежать на дуге окружности.



Суммарная комплексная амплитуда света в точке наблюдения P — это хорда.

В этих рассуждениях мы пренебрегли зависимостью амплитуды от расстояния $\sim \frac{1}{r}$ и пренебрегли зависимостью коэффициента наклона от угла дифракции. Такие приближения справедливы, если радиус отверстия в экране

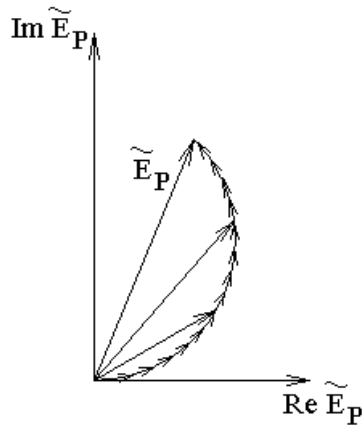
гораздо меньше расстояния от экрана до источника света и расстояния от экрана до точки наблюдения $r_m \ll L_i$.

Напомним, что в электричестве комплексные напряжения и токи пропорциональны $e^{i\omega t}$, а в оптике напряженность электрического поля пропорциональна $e^{-i\omega t}$. В результате этой разницы поворот комплексной амплитуды на комплексной плоскости, например, против часовой стрелки в электричестве означает опережение по фазе, а в оптике — отставание по фазе.

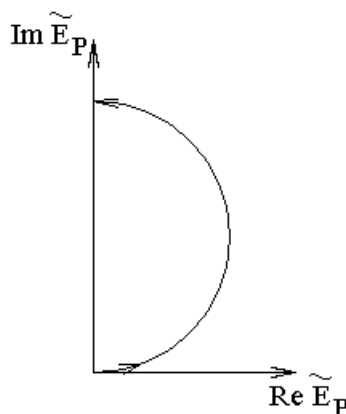
Напомним, что комплексная амплитуда $\tilde{E}_0(\vec{r})$ — это величина, входящая в выражение для вещественного поля $E(t, \vec{r})$:

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = \text{Re} \left\{ \tilde{E}_0(\vec{r}) \cdot \vec{e}_p \cdot e^{-i\omega t} \right\}$$

Рассмотрим изменение картины сложения амплитуд на комплексной плоскости при изменении радиуса отверстия и сохранении остальных параметров.



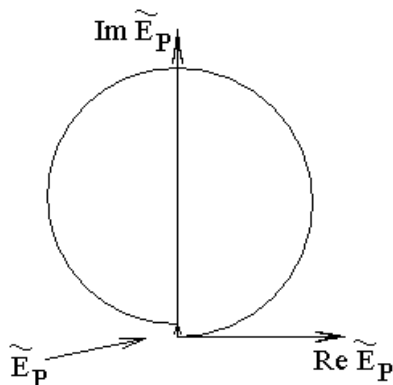
Если для точки наблюдения отверстие открывает одну зону Френеля, то картина сложения амплитуд имеет следующий вид:



Для внутреннего и внешнего края зоны Френеля по определению зоны Френеля разность хода равна $\Delta = \frac{\lambda}{2}$, что соответствует разности фаз $\delta\varphi = \pi$ и соответствует повороту вектора на комплексной плоскости на угол π . Если вклад от начала первой зоны смотрит направо, то от конца первой зоны —

налево. Следовательно, картина сложения амплитуд на комплексной плоскости — половина окружности.

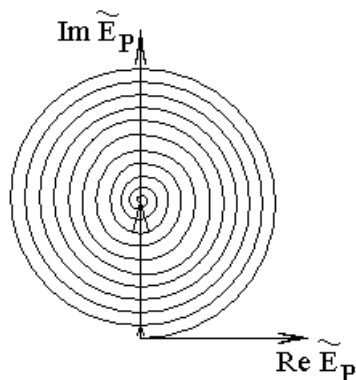
Аналогично для отверстия, которое открывает для точки наблюдения две зоны Френеля, картина сложения амплитуд — целая окружность. Суммарная амплитуда света E_P в этом случае очень мала.



Отличие амплитуды от нуля вызвано тем, что коэффициент наклона для второй зоны Френеля в среднем чуть меньше, чем для первой зоны, и расстояние от вторичных источников второй зоны до точки наблюдения чуть больше, чем для первой зоны.

Аналогично для отверстия с четным числом зон Френеля амплитуда почти нулевая, а для нечетного числа зон Френеля — максимальна.

Если отверстие открывает всю плоскость, то картина сложения амплитуд имеет примерно следующий вид:



На самом деле шаг спирали при приближении к центру окружности становится меньше и меньше.

При этом суммарная амплитуда \tilde{E}_0 — вертикальный радиус окружности, а амплитуда $\tilde{E}_1 = 2\tilde{E}_0$ при открытой первой зоне Френеля — диаметр окружности. Если открыта вся плоскость вторичных источников, то суммарная амплитуда \tilde{E}_0 равна амплитуде волны, падающей на экран с отверстием.

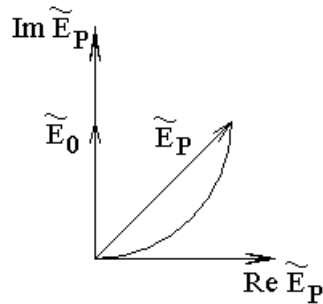
Интенсивность света пропорциональна квадрату амплитуды, следовательно:

$$I_1 = 4I_0.$$

Интенсивность света при открытой первой зоне Френеля в 4 раза больше, чем интенсивность света падающего на экран.

Для четного числа открытых зон интенсивность близка к нулю, для нечетного числа — близка к $4I_0$.

Если в какой-либо задаче говорится о дробной части зоны Френеля, то имеется в виду соответствующая часть площади отверстия одной зоны, а не радиуса одной зоны. На картине сложения комплексных амплитуд получается соответствующая часть дуги половины окружности. Так для половины первой зоны Френеля картина сложения амплитуд имеет вид четверти окружности:

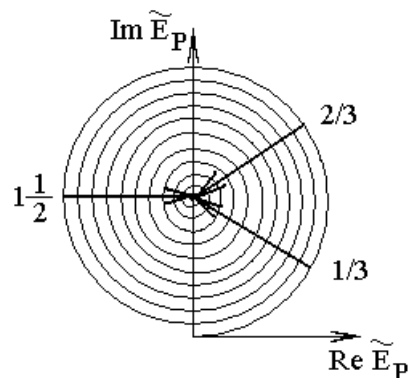


В этом случае $E_P = \sqrt{2}E_0$ и, соответственно, $I_P = 2I_0$.

Экзамен. Пятно Пуассона.

Если на пути плоской световой волны расположен непрозрачный диск или шар, то в центре геометрической тени есть светлое пятно — пятно Пуассона.

Рассмотрим три варианта картины сложения амплитуд на комплексной плоскости, когда непрозрачный диск закрывает $\frac{1}{3}$ зоны Френеля, $\frac{2}{3}$ зоны Френеля, $1\frac{1}{2}$ зоны Френеля:



В каждом случае часть дуги соответствующая непрозрачному диску не участвует в картине сложения амплитуд на комплексной плоскости, поэтому вектор оставшейся суммарной амплитуды начинается из конца соответствующей дуги.

Здесь в каждом случае комплексная амплитуда поля в точке наблюдения изображена соответствующим вектором. Как видно из рисунка длины трех

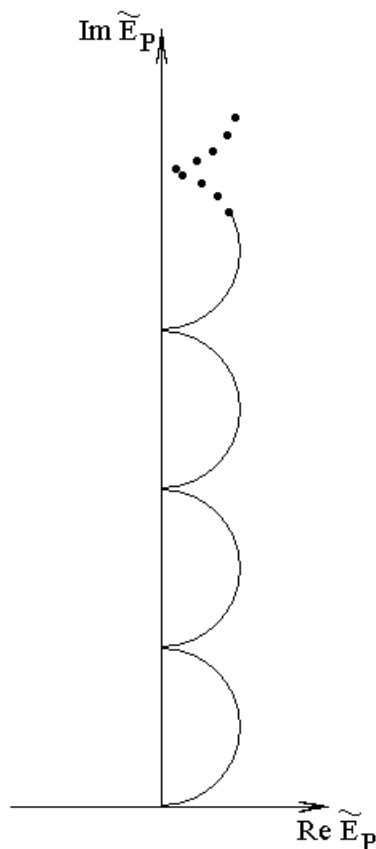
векторов практически одинаковы и равны радиусу окружности, что соответствует амплитуде света от всей открытой плоскости вторичных источников. Тогда одинаковыми будут и соответствующие интенсивности, так как они пропорциональны квадратам длины или модуля векторов. Интенсивность света в центре пятна Пуассона примерно равна интенсивности света I_0 падающей на диск волны.

Экзамен. Зонная пластинка. Фокус зонной пластинки.

Зонная пластинка — это прозрачная пластинка, на которой непрозрачной краской закрашены все четные или все нечетные зоны Френеля.

Точка, для которой рассчитаны радиусы зон Френеля, называется фокусом зонной пластинки.

Пусть зонная пластинка закрывает все четные зоны Френеля. Рассмотрим картину сложения амплитуд на комплексной плоскости от оставшихся нечетных зон:



Из рисунка видно, что в фокусе зонной пластинки интенсивность света очень велика.

Экзамен. Отношение интенсивностей в фокусах линзы и зонной пластинки.

Рассмотрим вклад в комплексную амплитуду от первых двух зон Френеля.

Линза развернет окружность двух первых зон в прямую линию, так как сделает волны, проходящие через все кольца в плоскости линзы, синфазными.

Большая интенсивность в фокусе линзы потому и получается, что свет приходит в фокус синфазно ото всех вторичных источников за линзой.

Если E_0 — радиус окружности на комплексной плоскости сложения амплитуд, то длина окружности равна $2\pi E_0$. Такое значение и будет иметь амплитуда поля в фокусе линзы, если у линзы открыты только две первых зоны.

Для зонной пластинки от двух первых зон открыта будет только первая зона. Амплитуда поля будет равна диаметру окружности на комплексной плоскости сложения амплитуд. Тогда амплитуда равна $2E_0$.

Тогда отношение амплитуд в фокусе линзы и зонной пластинки равно $\frac{2\pi E_0}{2E_0} = \pi$ в случае рассмотрения вклада только от двух первых зон Френеля.

Отношение вкладов от каждой следующей пары будет таким же. Следовательно, для линзы и зонной пластинки с одинаковым диаметром отношение амплитуд будет таким же.

Отношение интенсивностей равно отношению квадратов амплитуд, так как интенсивность света пропорциональна квадрату вещественной амплитуды поля.

Следовательно, отношение интенсивностей в фокусе линзы и зонной пластинки равно $\left(\frac{2\pi E_0}{2E_0}\right)^2 = \pi^2$.

Экзамен. Ложные фокусы зонной пластинки.

Кроме основного фокуса зонная пластинка имеет еще и ложные фокусы, интенсивность в которых такая же, как и в основном фокусе. Размер светового пятна в ложном фокусе меньше, чем в основном фокусе.

Пусть f — фокусное расстояние зонной пластинки.

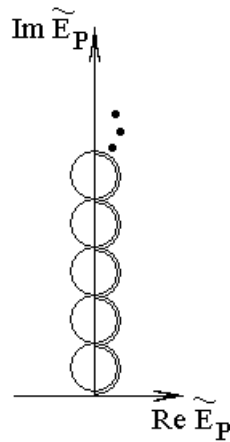
Рассмотрим точку наблюдения, которая находится на расстоянии $L = \frac{f}{3}$ от зонной пластинки.

Рассмотрим выражение для радиуса m -ой зоны Френеля $r_m = \sqrt{m\lambda L}$.

Зафиксируем в этом выражении r и заменим $L \rightarrow \frac{L}{3}$, тогда для сохранения равенства $r_m = \sqrt{m\lambda L}$ необходимо заменить $m \rightarrow 3m$.

Следовательно, в одной зоне Френеля при $L = \frac{f}{3}$ укладываются три зоны Френеля для $L = \frac{f}{3}$.

Для $L = \frac{f}{3}$ картина сложения амплитуд на комплексной плоскости имеет следующий вид:



Когда дуга сворачивается в полторы окружности вместо половины окружности, тогда радиус окружности уменьшается втрое. По этой причине амплитуда поля в ложном фокусе должна быть втрое меньше, чем амплитуда в основном фокусе.

С другой стороны ложный фокус расположен втрое ближе $L = \frac{f}{3}$ к зонной пластике, чем расположен основной фокус. С учетом зависимости амплитуды поля вторичного источника от расстояния вида $\sim \frac{1}{r}$ амплитуда поля в ложном фокусе должна быть втрое больше, чем амплитуда в основном фокусе.

В результате учета обоих факторов амплитуда поля в ложном фокусе равна амплитуде поля в основном фокусе.

Ложные фокусы расположены на следующих расстояниях от зонной пластинки: $\frac{f}{3}$, $\frac{f}{5}$, $\frac{f}{7}$ и так далее.