

### Экзамен. Принцип Бабине.

Согласно принципу Бабине

$$\tilde{E}_P = \tilde{E}_1 + \tilde{E}_2, \text{ где}$$

$\tilde{E}_P$  — комплексная амплитуда светового поля в точке наблюдения при отсутствии непрозрачного экрана,

$\tilde{E}_1$  и  $\tilde{E}_2$  — комплексные амплитуды в точке наблюдения для двух дополнительных друг другу непрозрачных экранов.

Пример дополнительных экранов — непрозрачный диск и непрозрачный экран с круглым отверстием того же радиуса.

Принцип Бабине полностью согласуется с теорией дифракции Кирхгофа, но сама теория неточна.

Поясним соответствие принципа Бабине теории дифракции Кирхгофа.

Рассмотрим три задачи и соответствующие им вторичные источники света в общей для этих задач плоскости экранов.

1). Экранов нет. Вторичные источники находятся на всей плоскости возможных непрозрачных экранов.

2). Экран с круглым отверстием. Вторичные источники находятся в плоскости отверстия.

3). Экран в виде непрозрачного диска. Вторичные источники расположены по всей плоскости снаружи диска.

Вторичные источники 2-ой и 3-ей задач в сумме дают вторичные источники 1-ой задачи. Тогда интеграл Кирхгофа для первой задачи равен сумме интегралов Кирхгофа для второй и третьей задач, что полностью согласуется с принципом Бабине.

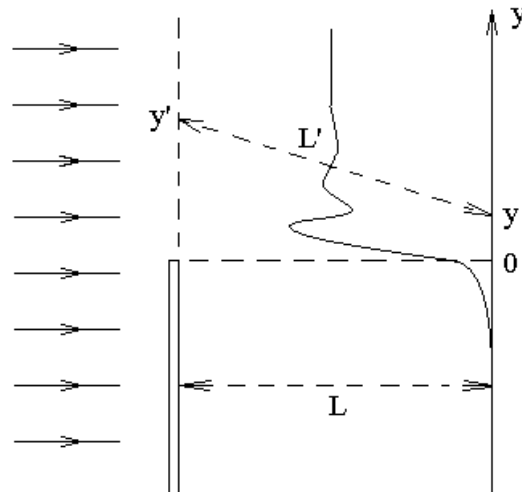
Рассмотрим дифракцию плоской монохроматической волны перпендикулярной плоскости экранов. Если экранов нет, то для любого направления, кроме исходного направления волны, света нет.

Тогда для дифракции Фраунгофера в любом направлении, кроме исходного направления, получим

$$0 = \tilde{E}_1 + \tilde{E}_2 \quad \Rightarrow \quad \tilde{E}_2 = -\tilde{E}_1 \quad \Rightarrow \quad I_1 = I_2.$$

Интенсивности дифракционных картин для дополнительных экранов равны для любого направления дифракции, кроме направления исходной световой волны.

### Экзамен. Дифракция Френеля на краю экрана. Спираль Корню.



Пусть монохроматическая световая волна распространяется слева направо в направлении оси  $z$ . Перпендикулярно направлению волны находится непрозрачный экран в виде бесконечной полуплоскости. На другом экране параллельном первому, находящемся на расстоянии  $L$ , наблюдают дифракционную картину. Оба экрана параллельны плоскости  $x, y$ . Пусть граница непрозрачной полуплоскости совпадает с осью  $x$ . На границе полуплоскости  $y = 0$ .

Вторичные источники света на открытой полуплоскости мысленно разобьем на полоски с координатой  $y'$  и шириной  $\delta y'$ . Пусть произвольная точка наблюдения имеет координату  $y$  и находится на расстоянии  $L'$  от полоски вторичного источника света.

В разные точки экрана  $y$  свет от разных вторичных источников  $y'$  приходит в разных фазах. Можно доказать, что для вторичных источников в виде тонких полосок разность фаз пропорциональна разности хода, как и в случае точечного вторичного источника. Тогда

$$\begin{aligned} \delta\varphi &= 2\pi \frac{\Delta}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda} (L' - L) = \frac{2\pi}{\lambda} \left( \sqrt{L^2 + (y' - y)^2} - L \right) = \\ &= \frac{2\pi}{\lambda} \left( L \sqrt{1 + \left( \frac{y' - y}{L} \right)^2} - L \right) \end{aligned}$$

Будем считать, что  $(y' - y) \ll L$ . Тогда

$$\delta\varphi \approx \frac{2\pi}{\lambda} \left( L \left( 1 + \frac{(y' - y)^2}{2L^2} \right) - L \right) = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{(y' - y)^2}{2L} = \frac{\pi (y' - y)^2}{\lambda L}$$

Вместо координат  $y'$  вторичного источника света и координаты  $y$  точки наблюдения введем соответствующие им безразмерные координаты:

$$\begin{cases} \xi' = y' \cdot \sqrt{\frac{2}{\lambda L}} \\ \xi = y \cdot \sqrt{\frac{2}{\lambda L}} \end{cases}.$$

В этих безразмерных координатах запаздывание по фазе зависит от разности координат вторичного источника и точки наблюдения следующим образом:

$$\delta\varphi = \frac{\pi}{2}(\xi' - \xi)^2.$$

В теории дифракции Френеля вклад в комплексную амплитуду светового поля в точке наблюдения от вторичных источников полосы шириной  $\delta\xi'$  пропорционален  $e^{i\delta\varphi} d\xi'$ , если считать, что в интеграле Кирхгофа сомножитель  $\frac{1}{r} = \frac{1}{L'} \approx \frac{1}{L}$  почти постоянен, так как  $(y' - y) \ll L$ . Открыта верхняя полуплоскость вторичных источников ( $y' > 0$  или  $\xi' > 0$ ), следовательно, комплексная амплитуда светового поля в точке наблюдения может быть выражена, как сумма вкладов по всем открытым вторичным источникам света

$$\tilde{E}_P(\xi) \sim \int_0^{+\infty} e^{i\delta\varphi} d\xi' = \int_0^{+\infty} e^{i\frac{\pi}{2}(\xi' - \xi)^2} d\xi'.$$

Будем рассматривать комплексную напряженность светового поля  $\tilde{E}_P$  тоже в безразмерных координатах, и вместо пропорциональности интегралу будем считать, что она просто равна этому интегралу. Сделаем в интеграле замену переменной интегрирования  $\eta = \xi' - \xi$  и получим

$$\tilde{E}_P(\xi) = \int_{-\xi}^{+\infty} e^{i\frac{\pi}{2}\eta^2} d\eta.$$

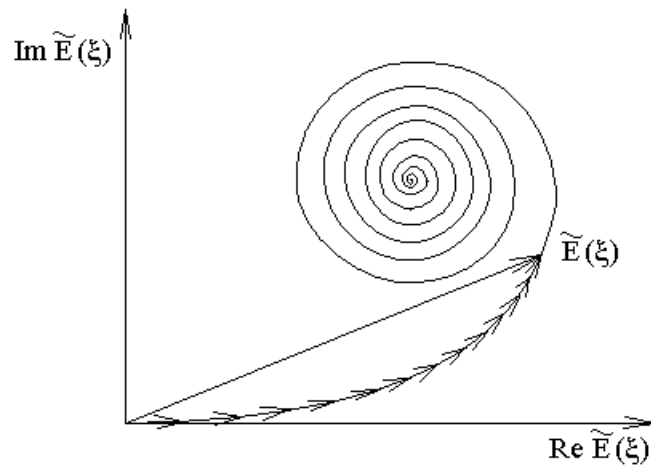
Здесь каждое подынтегральное слагаемое — это маленький вектор на плоскости комплексных амплитуд, который представляет собой вклад от узкой полосы вторичных источников света в комплексную амплитуду в точке наблюдения  $\tilde{E}_P(\xi)$ .

Рассмотрим аналогичный интеграл только с переменным верхним пределом  $\tilde{E}(\xi) = \int_0^{\xi} e^{i\frac{\pi}{2}\eta^2} d\eta$ . Тогда  $\tilde{E}_P(\xi) = \tilde{E}(+\infty) - \tilde{E}(-\xi)$ .

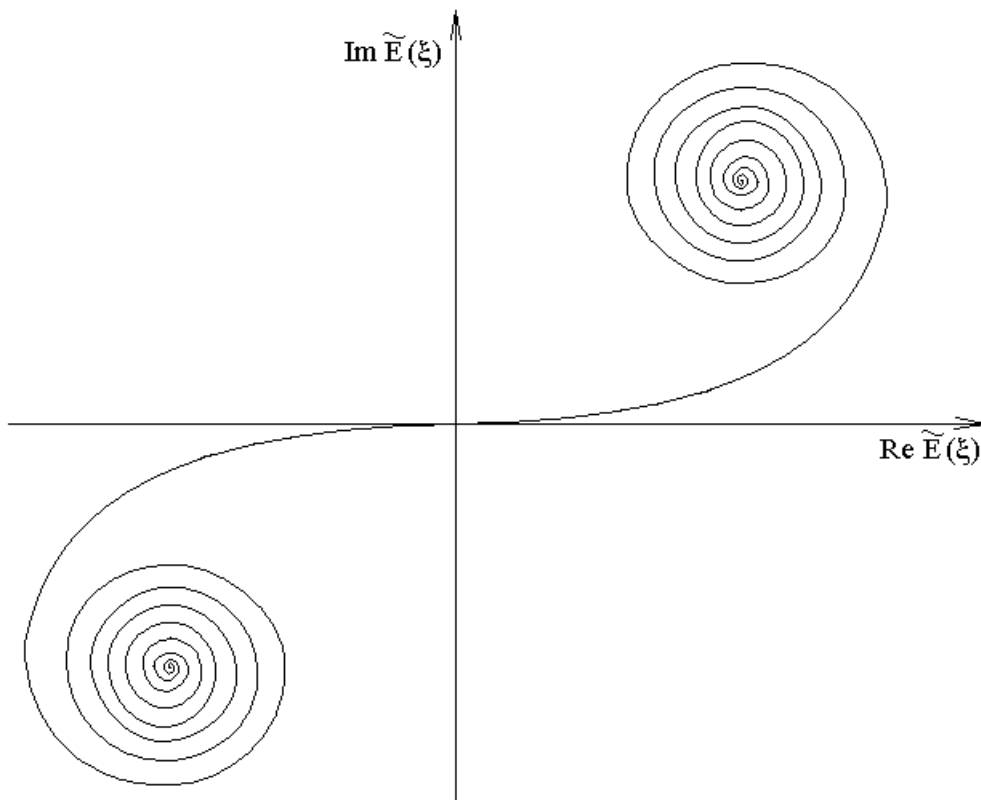
Здесь функцию  $\tilde{E}(\xi)$  можно рассматривать, как кривую на комплексной плоскости. Каждому вещественному значению  $\xi$  соответствует точка на

комплексной плоскости  $\tilde{E}(\xi) = \int_0^{\xi} e^{i\frac{\pi}{2}\eta^2} d\eta$ . Эту точку можно получить, как

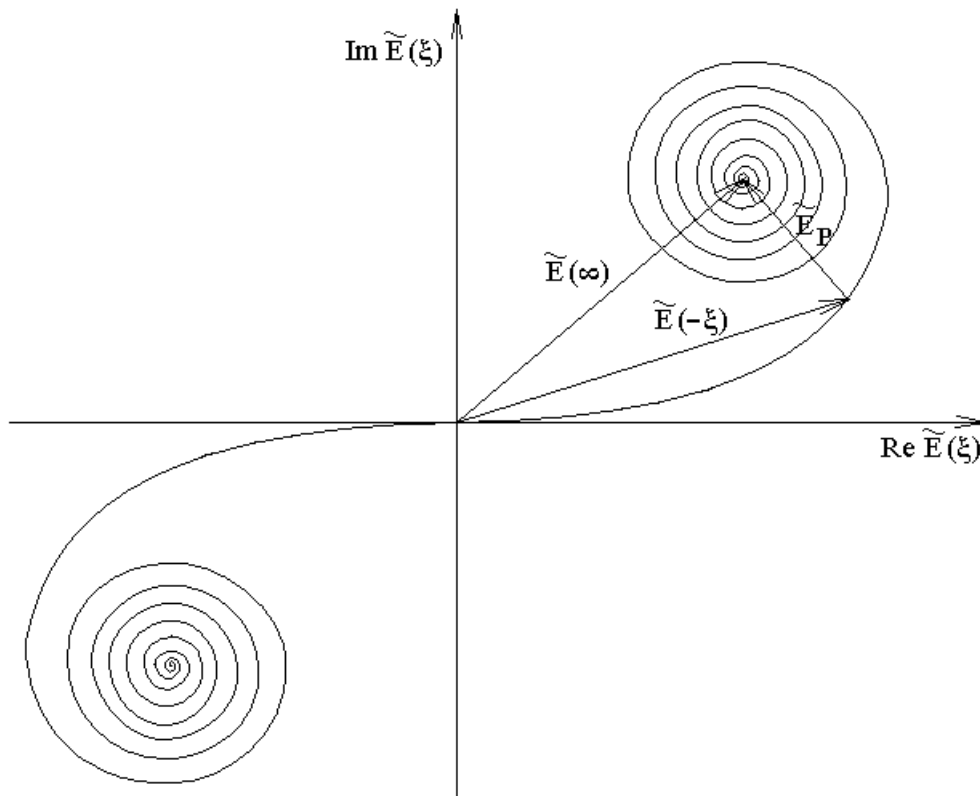
конечную точку суммы малых векторов на комплексной плоскости, как сумму подынтегральных слагаемых. Все эти векторные слагаемые будут направлены вдоль кривой графика из начала координат в точку  $\tilde{E}(\xi)$ , соответствующую координате  $\xi$ .



На рисунке представлена только часть кривой, соответствующая положительным значениям  $\xi$ . Каждому отрицательному значению  $\xi$  соответствует  $\tilde{E}(\xi)$ , отличающееся знаком от  $\tilde{E}(\xi)$  с положительным  $\xi$ , так как для отрицательного  $\xi$  величина  $d\eta$  в каждом подынтегральном слагаемом поменяет знак. Соответственно для кривой  $\tilde{E}(\xi)$  с отрицательными  $\xi$  получится аналогичный завиток в нижней левой четверти плоскости. Вся кривая представлена на следующем рисунке.



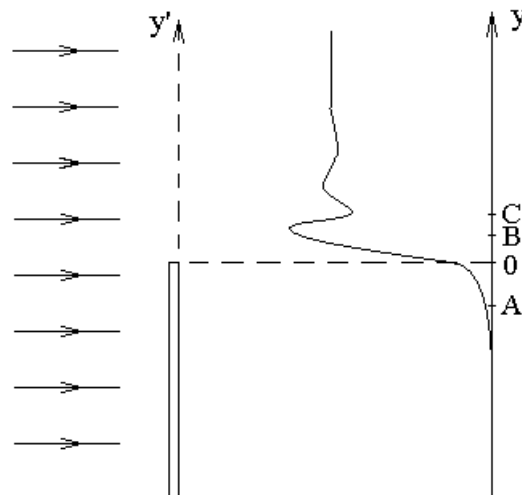
Это так называемая спираль Корню. Как уже отмечалось выше, комплексной амплитуде светового поля  $\tilde{E}_P(\xi) = \int_{-\xi}^{+\infty} e^{i\frac{\pi}{2}\eta^2} d\eta$  соответствует разность  $\tilde{E}_P(\xi) = \tilde{E}(+\infty) - \tilde{E}(-\xi)$ , например, в области геометрической тени для отрицательного значения  $y$  и соответственно для отрицательного  $\xi = y\sqrt{\frac{2}{\lambda L}}$  получим следующие векторы на кривой Корню.



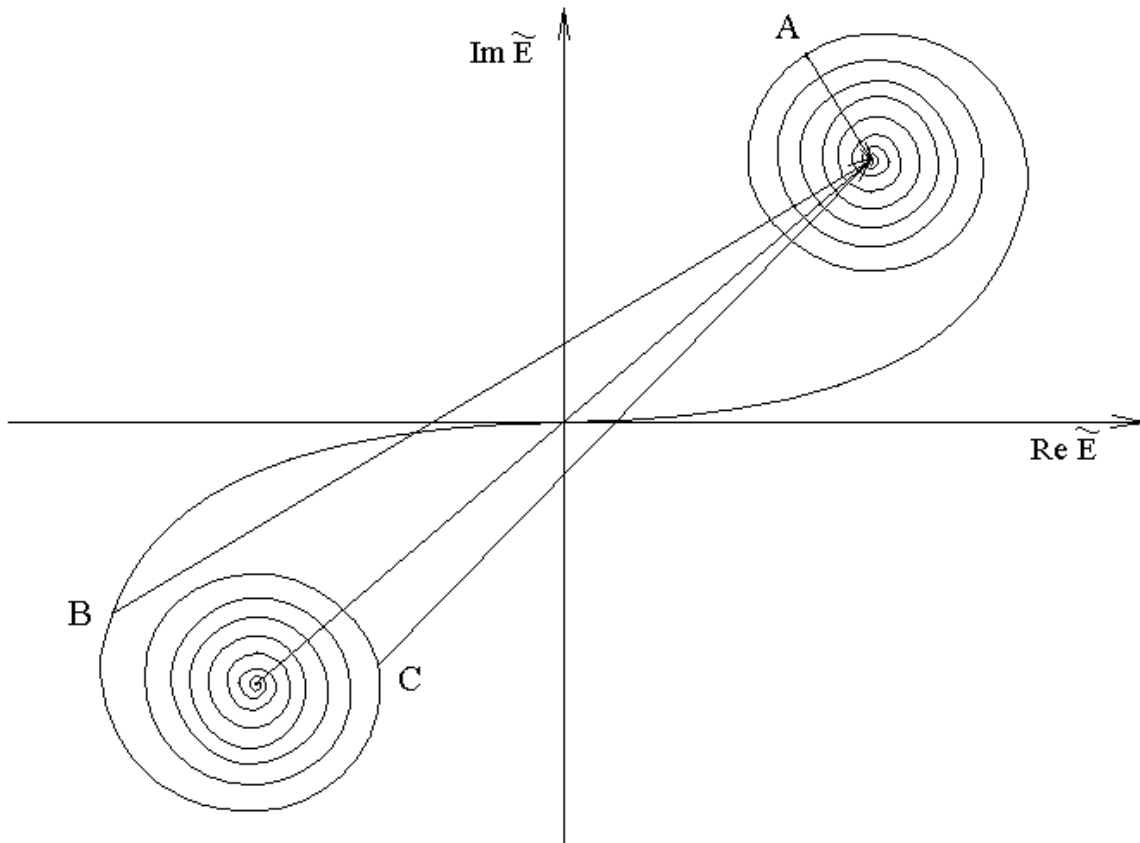
Вектор, проведенный из центра нижнего левого завитка спирали в центр верхнего правого завитка, равен комплексной амплитуде в точке наблюдения от всех полосок плоскости вторичных источников, то есть комплексной амплитуде излучения без загораживающей часть света экрана.

Каждой точке на экране наблюдения дифракционной картины соответствует определенное значение  $y$ -координаты. Этому значению соответствует безразмерная координата  $\xi = y \cdot \sqrt{\frac{2}{\lambda L}}$ . Комплексная амплитуда поля  $\tilde{E}_P$  в точке с координатой  $y$  равна вектору на спирали Корню из соответствующей точки  $\tilde{E}(-\xi)$  в центр правого завитка спирали, как это видно на рисунке сверху. Прямо на спирали Корню обычно отмечены точки с разными значениями  $\xi$ , поэтому можно сказать, что комплексная амплитуда равна вектору из точки  $-\xi$  в центр правого завитка.

Рассмотрим картину сложения амплитуд на комплексной плоскости для разных точек экрана:  $A, B, C$



и рассмотрим соответствующие точки на спирали Корню.



Пусть точка  $A$  находится в области геометрической тени, следовательно,  $y < 0$ ,  $\xi = y \cdot \sqrt{\frac{2}{\lambda L}} < 0$ ,  $-\xi > 0$ . То есть начальная точка  $\tilde{E}(-\xi)$  (или просто точка  $-\xi$ ) вектора комплексной амплитуды лежит в правом завитке спирали Корню.

Другими словами, для рассматриваемой точки  $A$  в области геометрической тени нужно учитывать не все вклады правого завитка. Вклады от центральной части правого завитка спирали Корню соответствуют большим

положительным значениям  $\eta = \xi' - \xi = (y' - y)\sqrt{\frac{2}{\lambda L}}$  и обязательно присутствуют. В результате получаем комплексную амплитуду в виде вектора из некоторой точки  $A$  в том же правом завитке в центр правого завитка спирали Корню.

Из спирали Корню видно, что при смещении точки наблюдения  $A$  в область геометрической тени (ближе к центру правого завитка спирали Корню) амплитуда света, как и интенсивность, монотонно убывают.

Для точки  $B$ , находящейся выше геометрической границы света и тени, появляются вклады  $(y' - y) < 0$ , соответствующие левой части спирали Корню вблизи начала координат на рисунке со спиралью Корню.

Из рисунка спирали Корню видно, что при движении от точки  $A$  к точке  $B$  и соответственно при движении вверх по экрану от границы геометрической тени амплитуда и интенсивность возрастают монотонно.

При дальнейшем движении вверх по экрану от точки  $B$  к точке  $C$  интенсивность света сначала чуть возрастает, а затем убывает. Это видно из рисунка со спиралью Корню, на котором вектор  $\overline{CA}$  комплексной амплитуды света для точки  $C$  короче вектора  $\overline{BA}$  комплексной амплитуды для точки  $B$ . Далее амплитуда света и интенсивность снова возрастают, затем снова убывают и т. д.

В освещенной области экрана интенсивность света осциллирует при перемещении от границы геометрической тени.

На границе света и тени амплитуда равна половине всей амплитуды падающей волны, а интенсивность, соответственно, равна четверти всей интенсивности.

Пространственный период осцилляций интенсивности на экране имеет порядок величины  $\sqrt{\lambda L}$ .

### Дифракционная решетка.

#### Экзамен. Главные дифракционные максимумы решетки.

Дифракционная решетка может работать как в отраженном свете, так и в прошедшем свете.

Рассмотрим решетку, работающую на пропускание. Такая решетка состоит из чередующихся прозрачных и непрозрачных полосок.

Пусть  $a$  — ширина прозрачной полоски,  $b$  — ширина непрозрачной полоски. Тогда величину  $a + b \equiv d$  — называют шагом дифракционной решетки или шириной штриха решетки.

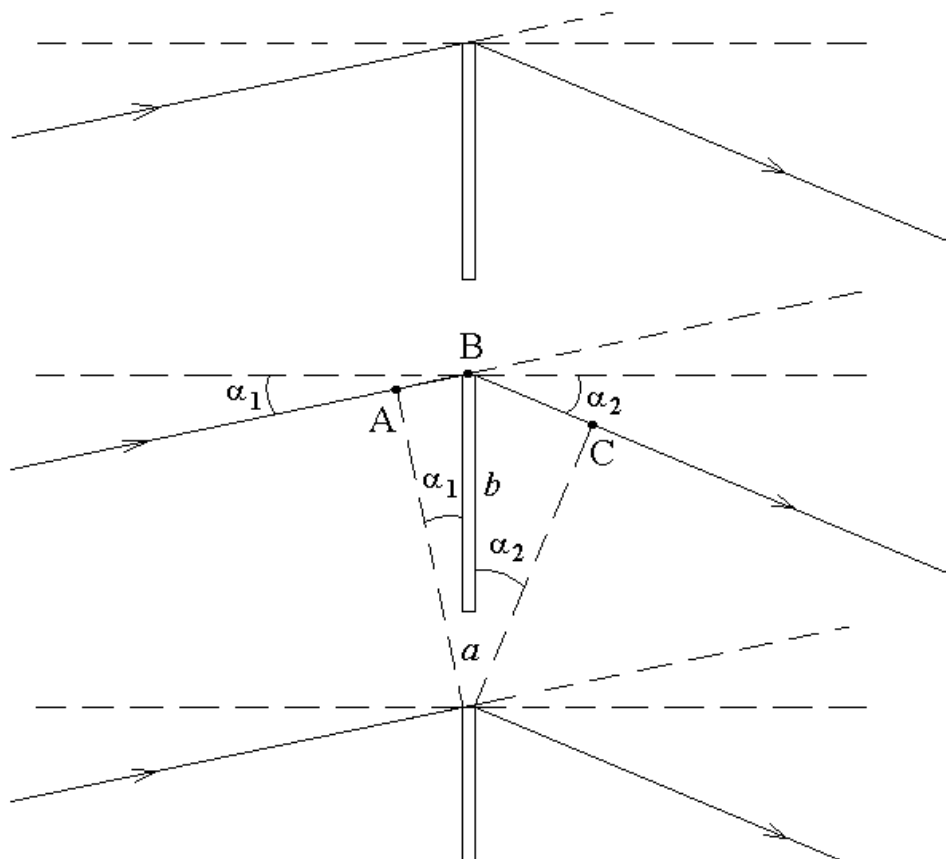
Будем рассматривать только дифракцию Фраунгофера, когда дифракционная картина локализована на бесконечности. Будем рассматривать возможные направления падающей световой волны только перпендикулярные направлению штриха решетки.

Направление главного дифракционного максимума решетки (по определению) — это направление, в котором свет от разных штрихов приходит в одинаковой фазе.

Если свет приходит в одинаковой фазе, то разность хода для соседних штрихов кратна длине волны.

$\Delta = m\lambda$ , где  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  — порядок дифракции.

На следующем рисунке рассмотрим дифракционную решетку, которая работает на пропускание. Плоскость решетки перпендикулярна плоскости рисунка. Штрихи решетки тоже направлены перпендикулярно плоскости рисунка.



Из рисунка видно, что разность хода  $\Delta$  лучей, проходящих через нижний край двух соседних штрихов решетки, равна сумме длин отрезков  $AB = d \cdot \sin(\alpha_1)$  и  $BC = d \cdot \sin(\alpha_2)$ . Тогда:

$\Delta = d \cdot (\sin(\alpha_1) + \sin(\alpha_2))$ , где  $d$  — шаг решетки,

Здесь  $\alpha_1$  — угол падения света на дифракционную решетку или угол между падающим лучом и нормалью к плоскости решетки,  $\alpha_2$  — угол дифракции.

Положительные направления для углов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  выбраны так, чтобы поворот луча составлял угол  $(\alpha_1 + \alpha_2)$ .

Для главного дифракционного максимума  $\Delta = m\lambda$  и, следовательно,  
 $d \cdot (\sin(\alpha_1) + \sin(\alpha_2)) = m\lambda$ .



Это основное уравнение дифракционной решетки. Его можно рассматривать, как уравнение для определения угла дифракции света  $\alpha_2$  при заданных остальных параметрах.

Для каждой длины волны света  $\lambda$  основное уравнение дифракционной решетки задает свое направление дифракции  $\alpha_2$ .

-----  
Отражательные дифракционные решетки обычно используются в спектрометре в качестве диспергирующего элемента вместо призмы. Параллельный пучок лучей падает на призму. После призмы свет каждой длины волны идет в своем направлении за счет дисперсии света (показатель преломления призмы зависит от длины волны света). Аналогично, если параллельный пучок света падает на дифракционную решетку, то после отражения от решетки свет с каждой длиной волны идет в свою сторону.

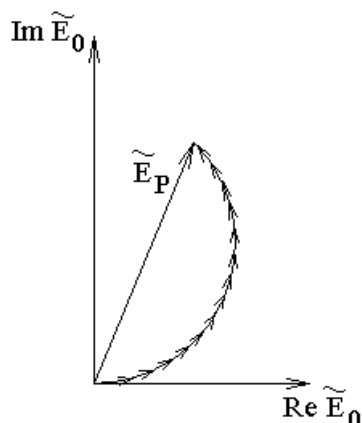
Спектр света, полученный с помощью дифракционной решетки, может быть осложнен наложением друг на друга спектров разных порядков дифракции.

### Экзамен. Угловая ширина главного дифракционного максимума решетки.

Пусть для некоторого угла дифракции разность хода для соседних штрихов почти кратна длине волны  $\Delta \approx m\lambda$ , но несколько отличается от  $m\lambda$ .

Если разность хода кратна  $\lambda$ , то разность фаз кратна  $2\pi$ . Такую разность фаз можно не учитывать и считать нулевой.

Дифракционная решетка всегда содержит много штрихов от нескольких сотен до десятков тысяч. В таком случае суммарная комплексная амплитуда в точке наблюдения от вторичных источников всех штрихов — это сумма большого числа векторов на комплексной плоскости. Векторы имеют одинаковую длину и развернуты друг относительно друга на одинаковые углы (угол поворота на комплексной плоскости равен разности фаз). Эти углы малы, если разность хода для соседних штрихов почти кратна  $\lambda$ , а соответствующая разность фаз почти кратна  $2\pi$ . В таком случае картина сложения комплексных амплитуд похожа на дугу окружности.



Количество слагаемых векторов равно числу штрихов решетки  $N$ .

При изменении угла дифракции дуга изменяет радиус кривизны без изменения длины дуги. При некотором угле дифракции дуга свернется в

окружность, и суммарная амплитуда окажется нулевой. Этот угол дифракции будет примерно равен угловой ширине на половине высоты главного дифракционного максимума решетки. Поясним это чуть позже, а сейчас найдем величину угла.

Если дуга свернулась в окружность, то сдвиг фаз между первым и последним  $N$ -ым слагаемым будет примерно равен  $2\pi$ :

$$\delta\varphi_{1N} \approx 2\pi.$$

Этот угол равен  $N-1$  углов между соседними векторами  $\delta\varphi_{12}$ , тогда

$$\delta\varphi_{12} = \frac{\delta\varphi_{1N}}{N-1} = \frac{2\pi}{N}.$$

Этой разности фаз комплексных амплитуд излучений двух соседних штрихов решетки соответствует разность хода:

$$\Delta_{12} = \lambda \frac{\delta\varphi_{12}}{2\pi} = \frac{\lambda}{2\pi} \delta\varphi_{12} = \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{N} = \frac{\lambda}{N}.$$

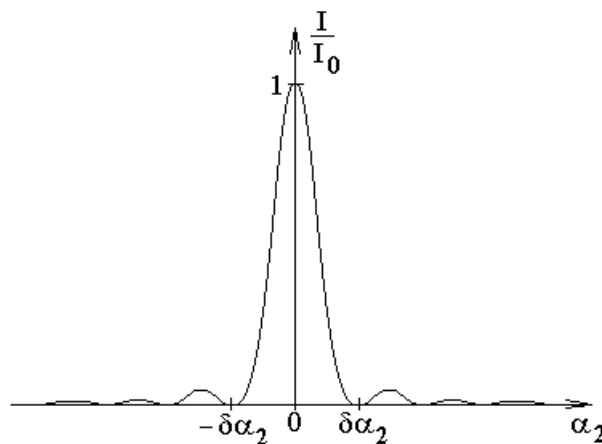
Найдем, какое изменение угла дифракции  $\delta\alpha_2$  соответствует такому изменению разности хода. Для этого продифференцируем уравнение  $\Delta = d \cdot (\sin(\alpha_1) + \sin(\alpha_2))$ , считая, что переменные величины — это разность хода  $\Delta$  и угол дифракции  $\alpha_2$ :

$$\delta\Delta = d \cdot \delta(\sin(\alpha_1) + \sin(\alpha_2)) = d \cdot \cos(\alpha_2) \cdot \delta\alpha_2 \Rightarrow \delta\Delta = d \cdot \cos(\alpha_2) \cdot \delta\alpha_2,$$

здесь  $\delta\Delta$  и  $\delta\alpha_2$  — дифференциалы.

Заменим в этом равенстве  $\delta\Delta$  разностью хода от двух соседних штрихов  $\Delta_{12} = \frac{\lambda}{N}$  и получим изменение угла дифракции  $\delta\alpha_2$ , соответствующее изменению амплитуды дифрагированной волны от максимума до нуля:

$$\delta\alpha_2 = \frac{\lambda}{Nd \cdot \cos(\alpha_2)}.$$



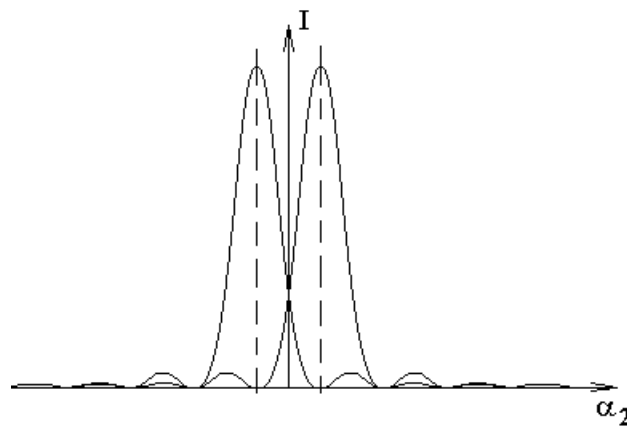
Из рисунка зависимости интенсивности дифрагированной волны от угла дифракции видно, что угол  $\delta\alpha_2 = \frac{\lambda}{Nd \cdot \cos(\alpha_2)}$  примерно равен угловой ширине главного дифракционного максимума на половине его высоты.

## Экзамен. Спектральное разрешение дифракционной решетки. Критерий Рэля.

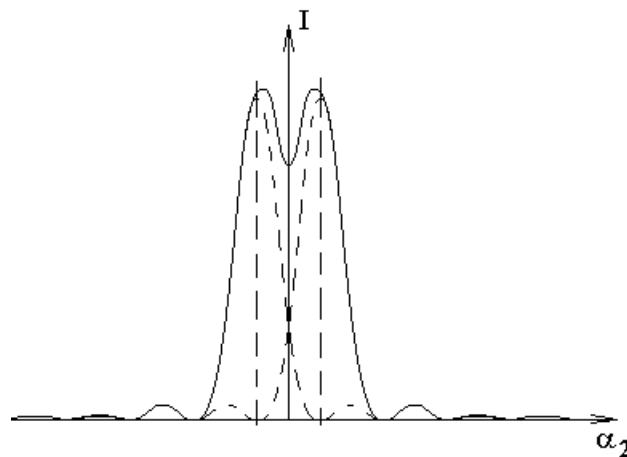
Пусть в спектре света, падающего на решетку, есть две близкие спектральные линии. В каких случаях дифракционная решетка позволяет определить, что линии две, а в каких не позволяет?

По критерию Рэля спектральные линии находятся на пороге разрешения, если главный дифракционный максимум одной спектральной линии совпадает с первым нулем интенсивности другой. Имеется в виду ноль интенсивности соседний с главным дифракционным максимумом, и подразумевается, что интенсивности двух спектральных линий равны.

Рассмотрим два графика зависимости интенсивности света от угла дифракции для каждой из двух спектральных линий.



Если спектральные линии близки, то нет возможности различить, где свет одной линии, а где — другой. Регистрируется только суммарная интенсивность двух спектральных линий. На пороге разрешения по критерию Рэля контур суммарной интенсивности имеет в центре примерно 20%-ый провал.



Провал суммарного контура интенсивности в 20% — второе определение критерия Рэля для предела спектрального разрешения.

Эти два определения критерия Рэля для разрешающей способности оптических приборов справедливы не только для дифракционных решеток, но и для других оптических устройств. Если зависимость интенсивности после

максимума не опускается до нуля, то пользуются вторым определением критерия Рэлея для разрешающей способности оптического прибора.

-----

Рассмотрим основное равенство дифракционной решетки

$$d \cdot (\sin(\alpha_1) + \sin(\alpha_2)) = m\lambda, \text{ где } m \text{ — целое число — порядок дифракции.}$$

Продифференцируем это равенство, считая, что переменные величины — это угол дифракции  $\alpha_2$  и длина световой волны  $\lambda$ . Тогда получим

$$d \cdot \cos(\alpha_2) \cdot \delta\alpha_2 = m \cdot \delta\lambda, \text{ где } \delta\alpha_2 \text{ и } \delta\lambda \text{ — дифференциалы.}$$

Подставим в получившееся равенство выражение для угловой ширины главного дифракционного максимума  $\delta\alpha_2 = \frac{\lambda}{Nd \cdot \cos(\alpha_2)}$  дифракционной решетки и получим

$$d \cdot \cos(\alpha_2) \cdot \frac{\lambda}{Nd \cdot \cos(\alpha_2)} = m \cdot \delta\lambda \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda}{N} = m \cdot \delta\lambda.$$

Отсюда можно выразить отношение  $\frac{\delta\lambda}{\lambda}$ :

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{mN}.$$

Этому изменению  $\delta\lambda$  длины волны  $\lambda$  соответствует такое изменение угла дифракции  $\alpha_2$ , которое для одной длины волны соответствует изменению интенсивности дифрагированной волны от главного дифракционного максимума до ближайшего нуля. По критерию Рэлея это изменение длины волны равно спектральному разрешению решетки.

В результате получаем, что относительное спектральное разрешение дифракционной решетки

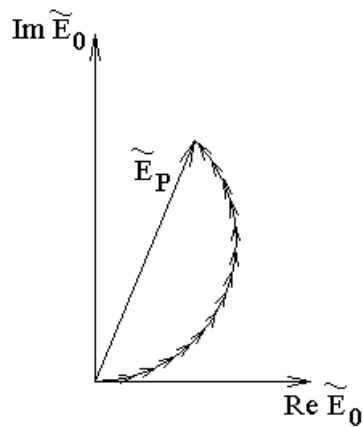
$$\frac{\delta\nu}{\nu} = \frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{mN},$$

где  $m$  — порядок дифракции,  $N$  — общее число штрихов решетки.

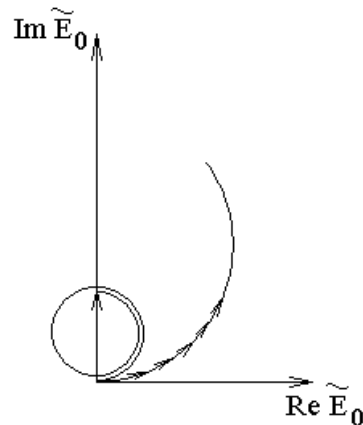
### **Экзамен. Побочные максимумы дифракционной решетки.**

Напомним рассмотрение вопроса об угловой ширине главного дифракционного максимума дифракционной решетки.

Как уже обсуждалось выше, на комплексной плоскости картина сложения комплексных амплитуд излучения разных штрихов решетки похожа на дугу окружности:



При изменении направления наблюдения света (угла дифракции) изменяется радиус кривизны без изменения длины дуги. При монотонном изменении угла дифракции дуга сначала сворачивается в окружность, а затем — в полторы окружности. Вектор, проведенный из начала дуги в конец при этом снова достигнет максимума. Этому максимуму амплитуды соответствует максимум интенсивности.



Это и есть побочный максимум дифракционной решетки.

Длина дуги при сворачивании не изменяется, поэтому отношение амплитуды побочного максимума к амплитуде основного максимума равно отношению диаметра окружности к длине дуги в полторы окружности. Напомним, что для главного дифракционного максимума решетки дуга разворачивается в горизонтальный отрезок.

$\frac{D}{\frac{3}{2}\pi D} = \frac{1}{\frac{3}{2}\pi}$  — отношение амплитуд максимумов. Тогда отношение

интенсивностей в первом побочном максимуме и в главном максимуме решетки будет равно:

$$\frac{I_1}{I_0} = \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\pi\right)^2}.$$

Следующие побочные максимумы получаются, когда дуга на комплексной плоскости сложения амплитуд сворачивается в две с половиной окружности, затем в три с половиной и т. д.

Интенсивности побочных максимумов относительно интенсивности главного максимума принимают значения:

$$\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\pi\right)^2}, \frac{1}{\left(\frac{5}{2}\pi\right)^2}, \frac{1}{\left(\frac{7}{2}\pi\right)^2}, \dots$$