

Экзамен. Интенсивность света при дифракции Фраунгофера на дифракционной решетке.

Найдем аналитическое выражение для зависимости интенсивности света от угла дифракции для произвольной дифракционной решетки.

Пусть амплитуда света в точке наблюдения от нижнего штриха решетки равна \tilde{E}_1 . От следующего штриха решетки свет придет в точку наблюдения с таким же модулем амплитуды, но с другой фазой. Фазовый сдвиг $\delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta$ определяется разностью хода $\Delta = d \cdot (\sin(\alpha_1) + \sin(\alpha_2))$, где d — шаг решетки, α_1 — угол падения света на решетку, α_2 — угол дифракции:

$$\delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta = k\Delta = kd \cdot (\sin(\alpha_1) + \sin(\alpha_2)).$$

Амплитуда света в точке наблюдения от второго штриха решетки равна $\tilde{E}_1 e^{i\delta\varphi}$, от третьего $\tilde{E}_1 e^{2i\delta\varphi}$, от четвертого $\tilde{E}_1 e^{3i\delta\varphi}$ и так далее. Амплитуда света от всей решетки:

$$\tilde{E} = \tilde{E}_1 + \tilde{E}_1 e^{i\delta\varphi} + \tilde{E}_1 e^{2i\delta\varphi} + \tilde{E}_1 e^{3i\delta\varphi} + \dots + \tilde{E}_1 e^{(N-1)i\delta\varphi}$$

где N — число штрихов решетки.

Складывая, как геометрическую прогрессию, получаем:

$$\tilde{E} = \tilde{E}_1 \frac{1 - e^{Ni\delta\varphi}}{1 - e^{i\delta\varphi}}.$$

Интенсивность света пропорциональна квадрату модуля амплитуды:

$$I = I_1 \frac{\sin^2\left(N \frac{\delta\varphi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta\varphi}{2}\right)},$$

здесь I — интенсивность света при дифракции Фраунгофера на дифракционной решетке в зависимости от угла дифракции α_2 , величина

$I_1 = I_0 \left(\frac{\sin(U)}{U}\right)^2$ — интенсивности света при дифракции Фраунгофера на

одной щели шириной a , здесь $U = \frac{1}{2}ka(\sin(\alpha_1) + \sin(\alpha_2))$, где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число, α_1 — угол падения света на решетку, α_2 — угол дифракции, N — число штрихов решетки.

Сравним $U = \frac{1}{2}ka(\sin(\alpha_1) + \sin(\alpha_2))$ с величиной

$\frac{\delta\varphi}{2} = \frac{1}{2}kd \cdot (\sin(\alpha_1) + \sin(\alpha_2))$ — половиной запаздывания по фазе между

световыми волнами от двух соседних штрихов решетки с периодом d . Из сравнения видно, что $U = \frac{a}{d} \cdot \frac{\delta\varphi}{2}$. Тогда

$$I = I_1 \frac{\sin^2\left(N \frac{\delta\varphi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta\varphi}{2}\right)} = I_0 \left(\frac{\sin(U)}{U}\right)^2 \frac{\sin^2\left(N \frac{\delta\varphi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta\varphi}{2}\right)} = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{a}{d} \frac{\delta\varphi}{2}\right)}{\left(\frac{a}{d} \frac{\delta\varphi}{2}\right)^2} \cdot \frac{\sin^2\left(N \frac{\delta\varphi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta\varphi}{2}\right)},$$

где $\delta\varphi = kd \cdot (\sin(\alpha_1) + \sin(\alpha_2))$ — разность фаз в точке наблюдения от соседних штрихов дифракционной решетки, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число, N — общее число штрихов решетки, d — шаг (или период) решетки, a — ширина прозрачной части штриха, α_1 — угол падения света на решетку, α_2 — угол дифракции, для которого вычисляется интенсивность света I .

Экзамен. Дифракционная решетка с отсутствующими четными главными дифракционными максимумами.

Свет дифрагирует на каждой прозрачной части штриха решетки, как на одной щели.

Рассмотрим решетку, у которой прозрачная и непрозрачная части штриха равны по ширине:

$$a = b = \frac{d}{2}.$$

При нормальном падении света на решетку $\alpha_1 = 0$ рассмотрим второй порядок дифракции $m = 2$:

$$\begin{cases} d \cdot (\sin(\alpha_1) + \sin(\alpha_2)) = m\lambda \\ m = 2 \\ \alpha_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow d \cdot \sin(\alpha_2) = 2\lambda \Rightarrow$$

$$\sin(\alpha_2) = \frac{2\lambda}{d}.$$

Рассмотрим интенсивность света, дифрагированного в этом направлении прозрачной частью одного штриха:

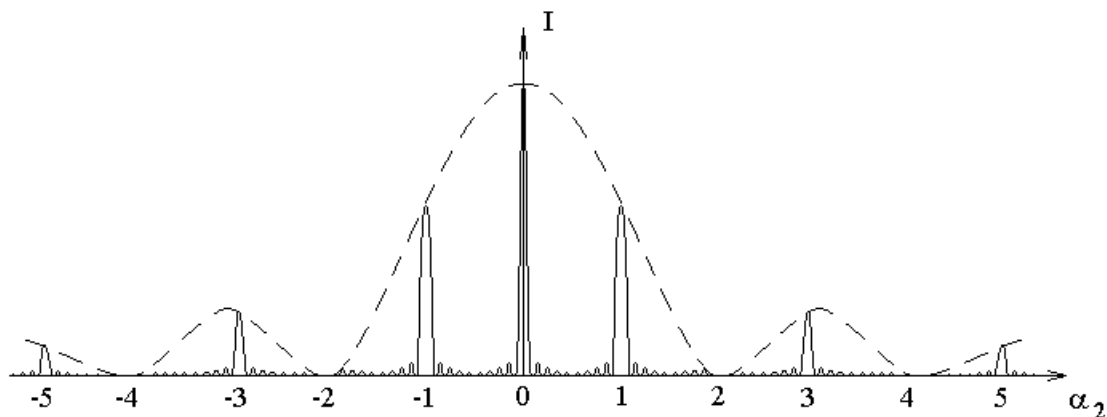
$$I(\alpha) = I_0 \left(\frac{\sin(U)}{U}\right)^2, \text{ где } U = \frac{1}{2}ka \cdot \sin(\alpha).$$

$$\text{Тогда с учетом } \sin(\alpha_2) = \frac{2\lambda}{d} \text{ получим } U = \frac{1}{2}ka \cdot \frac{2\lambda}{d} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{d}{2} \cdot \frac{2\lambda}{d} = \pi,$$

$$\text{тогда } \sin(U) = 0 \Rightarrow I(\alpha_2) = I_0 \left(\frac{\sin(U)}{U}\right)^2 = 0.$$

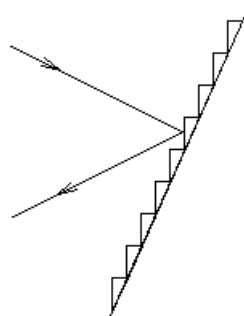
Следовательно, второй главный дифракционный максимум имеет нулевую интенсивность для решетки с одинаковой шириной прозрачной и непрозрачной части штриха $a = b = \frac{d}{2}$.

Аналогично можно показать, что для такой решетки пропадают все четные дифракционные максимумы кроме нулевого. Пример зависимости интенсивности монохроматического света от угла дифракции для такой решетки приведен на следующем рисунке.



Здесь пунктирной линией изображена зависимость интенсивности от угла дифракции для одного штриха решетки. Главные дифракционные максимумы решетки пронумерованы. Из рисунка видно, что четные главные максимумы попадают на нули интенсивности дифракции на одной щели.

Факультатив. Отражательная решетка с профилированным штрихом.



Большая часть энергии отражается в первый порядок дифракции, если в этом направлении зеркально отражает каждый штрих решетки.

Такие решетки используются в CO_2 -лазере в качестве одного из зеркал лазера. Такое зеркало отражает обратно свет в минус первый порядок дифракции только для одной длины волны

$$2d \cdot \sin(\alpha) = \lambda.$$

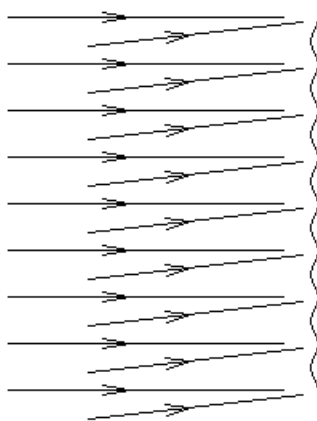
Поворот решетки и изменение угла падения и одновременно угла дифракции α приводит к изменению длины волны света λ , для которой решетка отражает свет строго назад.

Для CO₂-лазера в минус первый порядок дифракции решетки отражается до 90% энергии.

Голография.

Экзамен. Голограмма плоской световой волны.

Рассмотрим некоторый экран, на который падают две плоские монохроматические световые волны. Пусть одна из волн падает на экран строго перпендикулярно экрану. Назовем эту волну опорной волной. Пусть вторая волна, назовем ее сигнальной волной, падает на экран под небольшим углом к первой. На экране наблюдается интерференционная картина.

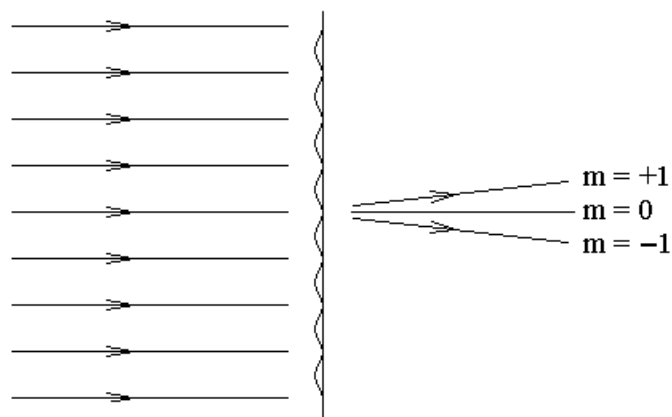


Уберем экран и рассмотрим плоскость вторичных источников в бывшем месте расположения экрана. В темной интерференционной полосе вторичных источников нет, в светлой полосе — есть.

Те же самые вторичные источники в рассматриваемой плоскости можно получить другим способом. Возьмем прозрачную пластинку, нанесем на нее фотоэмульсию и сфотографируем интерференционную картину в рассматриваемой нами плоскости. Это фотографирование назовем записью голограммы. Для записи голограммы используется лазерное излучение.

Будем считать, что темные интерференционные полосы стали темными непрозрачными полосами на фотопластинке, а светлые интерференционные полосы стали прозрачными полосами на фотопластинке. Эту проявленную фотографию будем называть голограммой.

Что будет, если на голограмму направить только одну из двух световых волн — опорную волну? Интерференционная картина, запечатленная на голограмме, будет выполнять функцию дифракционной решетки, работающей на пропускание. Если почернение голограммы — гармоническая функция координаты, то дифракционная решетка имеет только нулевой и плюс-минус первые порядки дифракции m .



Здесь в первом порядке дифракции $m = +1$ — восстановленная сигнальная волна, в нулевом порядке $m = 0$ — прошедшая опорная волна, и еще одна волна в минус первом порядке дифракции — лишняя волна.

Таким образом, если голограмму осветить опорной волной, то в прошедшем свете за голограммой кроме опорной волны появляется восстановленная сигнальная волна.

Освещение голограммы опорной световой волной и наблюдение восстановленной сигнальной волны называется воспроизведением голограммы.

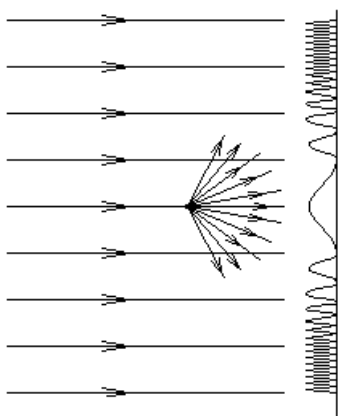
Почему нет минус первого порядка дифракции от вторичных источников света, если убрать фотопластинку при записи голограммы?

Дело в том, что при восстановлении голограммы все вторичные источники света в плоскости фотопластинки имеют одинаковую фазу, а при записи голограммы фазы в плоскости фотопластинки разные.

Экзамен. Голограмма точки при нормальном падении опорной волны.

Рассмотрим запись голограммы.

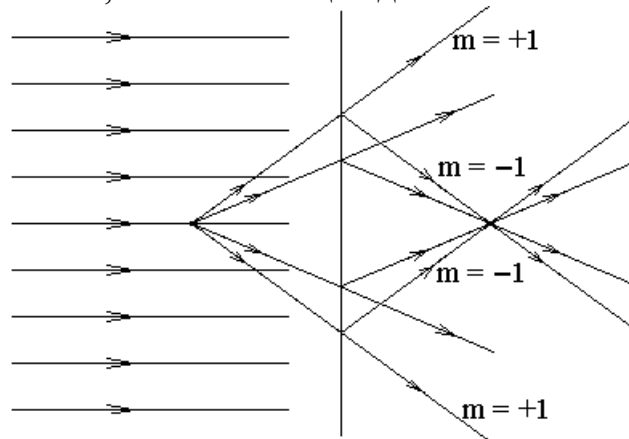
Пусть перпендикулярно на фотопластинку падает опорная монохроматическая световая волна, и пусть на пути световой волны находится маленькая песчинка, рассеивающая свет.



Волна, рассеянная песчинкой, — сигнальная волна. Сигнальная волна будет иметь почти сферический фронт. На фотопластинке опорная и сигнальная волны интерферируют. Задача имеет осевую симметрию, следовательно, и интерференционная картина обладает той же симметрией.

Интерференционная картина — светлые и темные кольца. В центре интерференционной картины угол α между двумя интерферирующими волнами мал, следовательно, интерференционные полосы — широкие. Ширина полос $d = \frac{\lambda}{\alpha}$. По мере удаления от центра экрана интерференционные кольца становятся все уже и уже, так как угол α между интерферирующими волнами увеличивается.

После проявления фотопластинки получим голограмму точки. Для воспроизведения голограммы осветим ее опорной волной. Каждый небольшой участок голограммы можно рассматривать, как голограмму плоской волны, так как на малом участке ширина интерференционных полос почти постоянна. Из каждого малого участка голограммы при ее освещении опорной волной выходят три волны: $m = +1$ — восстановленная сигнальная волна, $m = 0$ — прошедшая опорная волна, $m = -1$ — еще одна световая волна.

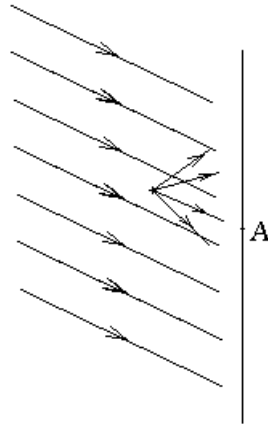


На рисунке, чтобы не загромождать его, изображены только некоторые лучи первого и минус первого порядков дифракции. Лучи плюс первого порядка дифракции как бы выходят из мнимого восстановленного изображения точечного источника сигнальной волны. Лучи минус первого порядка дифракции формируют лишнее действительное изображение справа от голограммы.

Заметим, что голограмма фокусирует свет в точку действительного изображения. Если почернение интерференционных полос голограммы имеет прямоугольный профиль, а не гармонический профиль, как это наиболее желательно для голограммы, то голограмма точки представляет собой зонную пластинку для точки действительного изображения.

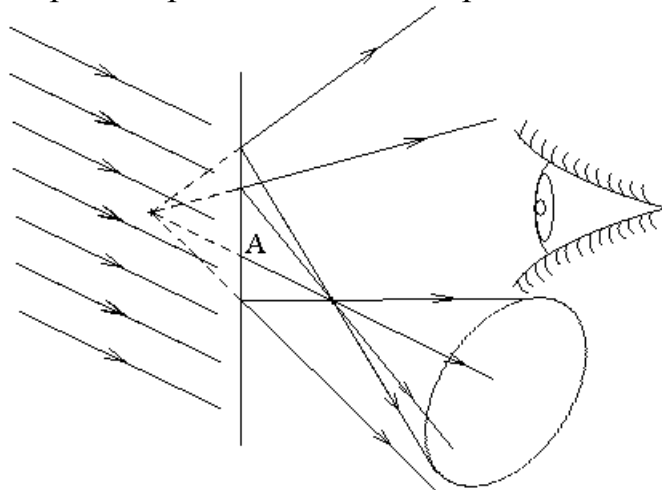
Экзамен. Голограмма точки при наклонном падении опорной волны.

Запись голограммы.



Рассмотрим луч, который рассеян точечным объектом почти в направлении опорной волны. Этот луч проходит фотопластинку в некоторой точке A . Угол α между двумя интерферирующими лучами для этой точки близок к нулю, а интерференционные полосы в точке A очень широкие $d = \frac{\lambda}{\alpha}$.

Рассмотрим теперь воспроизведение голограммы.

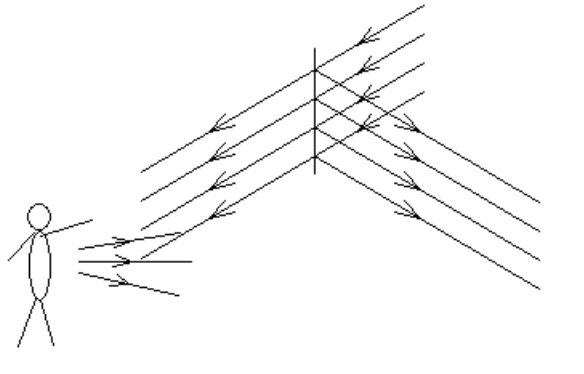


В окрестности точки A голограммы интерференционные полосы самые широкие. Для дифракционной решетки с широкими штрихами d нулевой и плюс-минус первый дифракционные максимумы направлены почти одинаково, так как характерные углы дифракции $\frac{\lambda}{d}$ малы. Минус первые порядки дифракции разных участков голограммы должны пересекаться в точке действительного изображения. Следовательно, действительное изображение находится на продолжении луча, проходящего через точку A голограммы. Расстояние от голограммы до действительного изображения примерно такое же, как от голограммы до восстановленного мнимого изображения точки рассеяния.

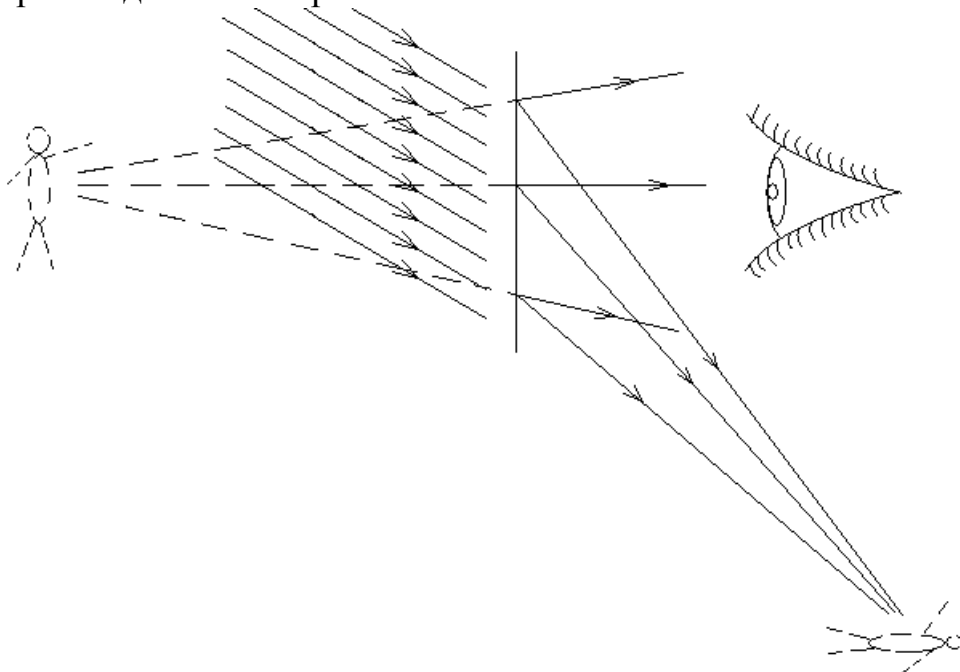
Как видно из рисунка, наклонное падение опорной волны позволяет сделать так, чтобы лучи, проходящие через действительное изображение, не попадали в глаз и не мешали рассматривать восстановленное мнимое изображение.

Экзамен. Плоская голограмма протяженного объекта.

Запись голограммы. Освещение объекта и опорная волна формируются из излучения одного лазера при расщеплении излучения на полупрозрачной пластине. Свет, рассеянный объектом и свет опорной волны интерферируют на фотопластинке.



Воспроизведение голограммы.

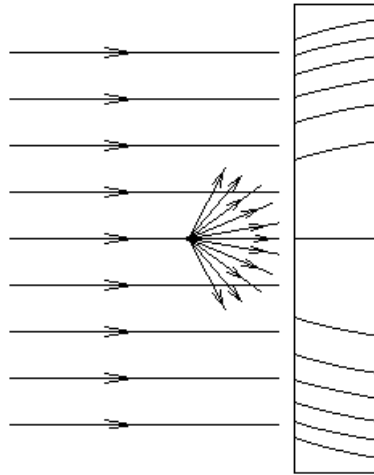


Изображение, полученное при восстановлении голограммы — объемное изображение. При разглядывании голограммы впечатление такое, что вы смотрите на голограмму, как в окно. Если один предмет мнимого изображения несколько загороживает другой предмет, то можно отклонить голову в сторону, чтобы увидеть заслоняемый объект. Для полной иллюзии окна не хватает только, чтобы изображение было цветным. Восстановленное изображение видно в монохроматическом свете опорной волны, которым производилась запись голограммы и которым голограмма воспроизводится.

Экзамен. Толстослойная голограмма.

Рассмотрим голограмму одной точки с нормально падающей опорной волной. Пусть голограмма записывается в свете с длиной волны λ .

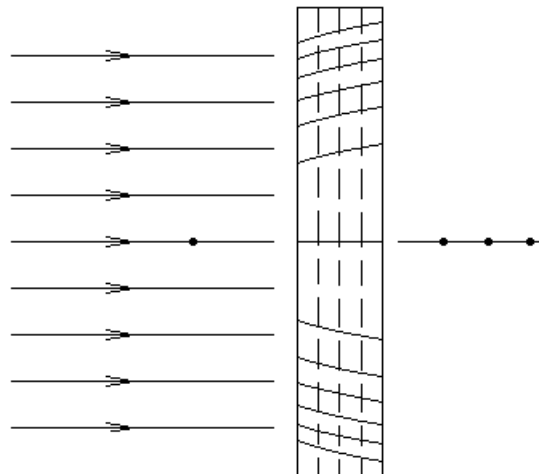
Запись голограммы.



Здесь справа толстослойная фотопластинка, и в ней изображены темные интерференционные полосы в сечении плоскостью рисунка. Задача обладает осевой симметрией, и темные полосы в объеме фотопластинки представляют собой параболоиды вращения с осью, совпадающей с осью симметрии задачи.

Фокусы параболоидов совпадают с рассеивающей свет точкой.

Воспроизведение голограммы.



Здесь точка слева от голограммы — восстановленное мнимое изображение точечного источника рассеянного света. Рассмотрим три пунктирные плоскости внутри голограммы, как три плоские голограммы. Для каждой из этих трех голограмм восстановленное мнимое изображение находится в одной и той же точке слева от голограммы. Действительные же изображения находятся симметрично мнимому изображению относительно соответствующей плоской голограммы, и для каждой плоской голограммы действительное изображение находится в своей точке. Это три точки справа от толстослойной голограммы.

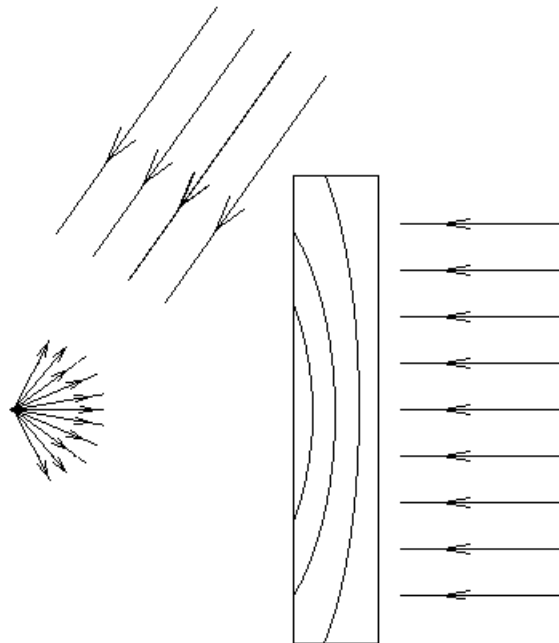
Действительные изображения разных слоев голограммы находятся в разных точках, то есть действительное изображение смазано, и поэтому его не видно. Мнимые изображения находятся в одной точке и поэтому отчетливо видны.

Плоская голограмма точки подобна зонной пластинке. Радиус m -ой зоны Френеля $r_m = \sqrt{m\lambda L}$. Если при восстановлении голограммы используется свет другой длины волны, то радиусы зон Френеля измениться не могут, так как голограмма уже проявлена и зафиксирована. Следовательно, изменится величина $L \sim \frac{1}{\lambda}$, и изображение, восстановленное в свете другой длины волны, окажется на другом расстоянии от голограммы. При этом для разных слоев толстослойной голограммы положения восстановленного изображения окажутся разными, не только для действительных изображений, но и для мнимых изображений. То есть изображения смажутся и не будут видны.

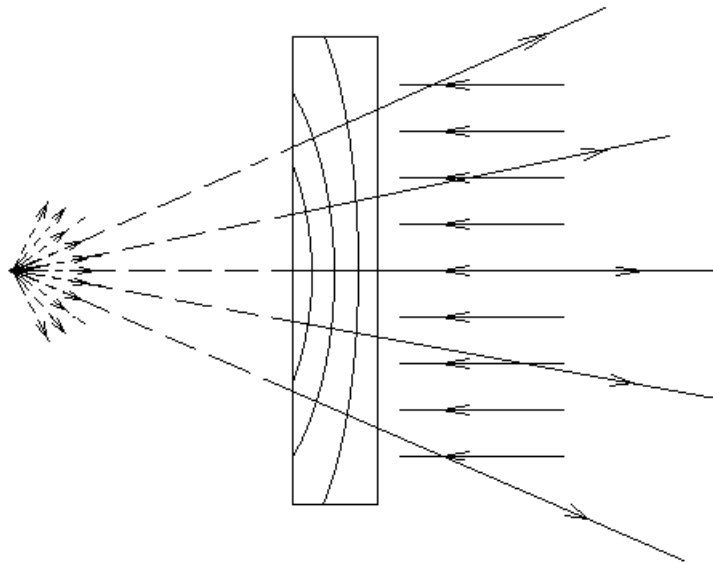
Если же восстанавливать голограмму, освещая ее белым светом, то толстослойная голограмма сама выберет длину волны, при которой ее записывали, и в этой длине волны сформирует мнимое изображение. Если при восстановлении голограммы ее освещать белым светом из другого направления, не совпадающим с направлением света при записи голограммы, то восстановленное изображение будет искажено по форме и по цвету. При освещении голограммы рассеянным светом со всех направлений изображение смазывается.

Метод Денисюка — это метод записи толстослойной голограммы во встречных световых пучках. Это наиболее прогрессивный метод записи голограмм.

Запись голограммы точки:



Воспроизведение голограммы точки:



Голограмма работает, как многослойное зеркало. Отраженные волны от каждого слоя складываются синфазно в направлении восстановленной волны.

Преимущество записи во встречных пучках состоит в том, что воспроизведение голограммы происходит в отраженном свете, а не на просвет.

Для получения цветной голограммы запись производится в излучении лазеров трех цветов. Воспроизведение голограммы производится в сильном белом свете. Голограмма сама выбирает из белого света излучение трех длин волн, в которых производилась запись.

Дифракционный предел разрешения.

Экзамен. Дифракционный предел разрешения телескопа и глаза.

Будем считать, что телескоп — это одна линза (объектив) и экран в фокальной плоскости линзы. Будем считать, что прямо перед линзой объектива находится круглое отверстие в непрозрачном экране и диаметр отверстия равен диаметру линзы.

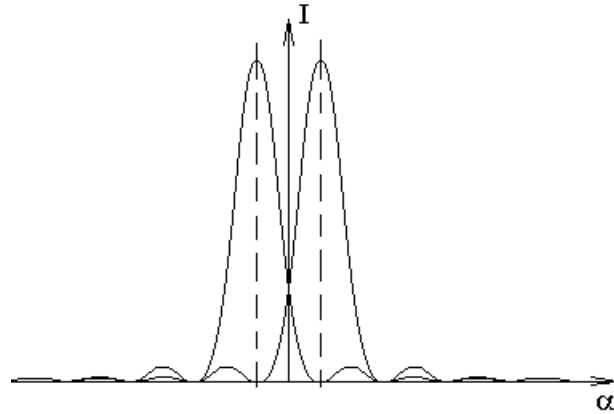
Свет далекой звезды приходит в виде почти плоской волны. В таком случае, в фокальной плоскости объектива наблюдается дифракция

Фраунгофера на круглом отверстии: $I(\alpha) = I_0 \left(\frac{2J_1(U)}{U} \right)^2$, где $U = \frac{1}{2} kD \cdot \sin(\alpha)$,

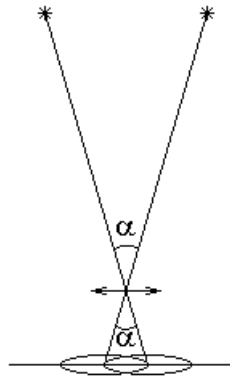
$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число, D — диаметр отверстия. Угловой радиус первого

темного кольца дифракционного изображения $\alpha = 1.22 \frac{\lambda}{D}$.

Рассмотрим теперь две близкие звезды. По критерию Рэля звезды почти разрешены, если максимум интенсивности дифракционного изображения одной звезды совпадает с первым нулем интенсивности изображения другой звезды.



Рассмотрим луч, выходящий из центра звезды и проходящий через центр объектива. Этот луч приходит в центр диска Эйри дифракционного изображения звезды на экране. Рассмотрим такой луч для каждой из двух звезд.



Из рисунка видно, что угол между направлениями на две звезды равен углу из центра объектива в центры двух изображений звезд. А на пределе разрешения по критерию Рэля он же будет равен угловому радиусу первого темного кольца дифракционного изображения одной звезды.

В результате угловое разрешение телескопа или угол между направлениями на две звезды, при котором они едва разрешимы, равен угловому радиусу первого темного кольца дифракции Фраунгофера на круглом отверстии:

$$\alpha = 1.22 \frac{\lambda}{D}, \text{ где } D \text{ — диаметр объектива телескопа.}$$

Аналогично телескопу угловое разрешение глаза равно

$$\alpha = 1.22 \frac{\lambda}{D},$$

где D — диаметр зрачка глаза.

Угловое разрешение здорового глаза близко к дифракционному пределу разрешения.

Рассмотрим еще одно объяснение того, что изображение удаленного точечного источника не является точечным, а имеет некоторый дифракционный размер.

Поверхность равных фаз перед линзой плоская, а за линзой — сферическая. Центр сферы находится в фокусе линзы. Рассмотрим излучение вторичных источников этой сферической поверхности равных фаз.

В фокусе линзы излучение вторичных источников синфазно, поэтому там большая амплитуда света.

При небольшом смещении точки наблюдения от фокуса на расстояние гораздо меньшее длины волны свет вторичных источников приходит в точку наблюдения почти синфазно, и амплитуда света в точке наблюдения тоже будет большой. Поэтому изображение неточечное.

Аналогично из рассмотрения интеграла Кирхгофа можно показать, что свет нельзя собрать на площадку размером меньше $\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2$.