Экзамен. Оптика плазмы.

Плазма — это ионизованный газ. Например, в газоразрядных лампах дневного света светится плазма. Ионизация газа происходит под ударами электронов, которые разгоняются электрическим полем. Плазма содержит газ нейтральных атомов, электроны и положительные ионы.

Ионы в тысячи раз тяжелее электронов и под действием электрического поля световой волны почти не смещаются. Взаимодействие света с плазмой — это в основном взаимодействие со свободными электронами плазмы.

Свободный электрон можно рассматривать, как предельный случай электрона в атоме, если считать, что возвращающая сила со стороны ядра атома равна нулю.

В модели атома Томсона квадрат резонансной частоты $\omega_0^2 \equiv \dfrac{4\pi\rho q}{3m}$ был введен, как величина пропорциональная отношению возвращающей силы к смещению от положения равновесия. Если возвращающая сила равна нулю, то и резонансная частота тоже равна нулю $\omega_0 = 0$. Тогда вместо комплексной поляризуемости атома $\tilde{\alpha} = \dfrac{f\dfrac{e^2}{m_e}}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega\gamma}$ получим

$\tilde{\alpha} = \dfrac{-\dfrac{e^2}{m_e}}{\omega^2 + 2i\omega\gamma}$ — поляризуемость свободного электрона на частоте светового поля ω.

В случае свободного электрона $\gamma << \omega$. В результате в грубом приближении можно отбросить второе слагаемое в знаменателе выражения для поляризуемости свободного электрона на частоте светового поля ω и получить, что комплексная поляризуемость вещественная, но отрицательная:

$$\tilde{\alpha} = -\frac{e^2}{m_e\omega^2}.$$

Поляризация среды равна произведению концентрации N на средний дипольный момент:

$$\vec{P} = N \cdot \langle \vec{p} \rangle = N\alpha \cdot \langle \vec{E} \rangle = N\alpha\vec{E}.$$

Сравним это с определением диэлектрической восприимчивости χ в соответствии с равенством $\vec{P} = \chi\vec{E}$ и получим, что $\chi = N\alpha$.

Из равенств $\vec{D} \equiv \vec{E} + 4\pi\vec{P}$, $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ и $\vec{P} = \chi\vec{E}$ получаем связь диэлектрической проницаемости и диэлектрической восприимчивости $\varepsilon = 1 + 4\pi\chi$, а с учетом $\chi = N\alpha$ получаем $\varepsilon = 1 + 4\pi N\alpha$. Это же равенство справедливо и для комплексных ε и α:

$$\tilde{\varepsilon} = 1 + 4\pi N\tilde{\alpha}.$$

В отличие от формулы Клаузиуса — Моссотти: $\frac{\tilde{\varepsilon}-1}{\tilde{\varepsilon}+2}=\frac{4}{3}\pi N\tilde{\alpha}$ для неполярных диэлектриков для плазмы справедлива формула $\tilde{\varepsilon}=1+4\pi N\tilde{\alpha}$, так как для плазмы считают, что нет разницы между полем, действующим на электрон и средним полем в среде. Нелинейная зависимость $\tilde{\varepsilon}$ от $\tilde{\alpha}$ в формуле Клаузиуса — Моссотти получается именно в результате этой разницы.

Тогда с учетом $\tilde{n}=\sqrt{\tilde{\varepsilon}\tilde{\mu}}\approx\sqrt{\tilde{\varepsilon}}$ получаем:

$\tilde{n}^2\approx 1+4\pi N\tilde{\alpha}$.

Подставим сюда выражение для поляризуемости свободных электронов $\tilde{\alpha}=-\frac{e^2}{m_e\omega^2}$ и получим

$$\tilde{n}^2=1-\frac{4\pi Ne^2}{m_e\omega^2}.$$

Это равенство можно переписать в виде:

$$\tilde{n}^2=1-\frac{\omega_n^2}{\omega^2},$$

где коэффициент при $\frac{1}{\omega^2}$ обозначен, как $\omega_n^2\equiv 4\pi N\frac{e^2}{m_e}$, и называется квадратом плазменной частоты, так как он имеет размерность квадрата частоты. В системе СИ: $\omega_n^2\equiv N\frac{e^2}{m_e\varepsilon_0}$.

Взаимодействие плазмы со световым полем существенно различается в двух спектральных диапазонах: если частота света меньше плазменной частоты $\omega<\omega_n$ и если частота света больше плазменной частоты $\omega>\omega_n$.

В первом диапазоне световых частот $\omega<\omega_n$ получим, что квадрат показателя преломления является отрицательной величиной:

$$\tilde{n}^2=1-\frac{\omega_n^2}{\omega^2}<0 \quad .$$

Тогда сам показатель преломления — чисто мнимая величина $\tilde{n}=in''$.

Коэффициент поглощения среды связан с мнимой частью показателя преломления соотношением $\aleph=2\frac{\omega}{c}n''$.

Казалось бы, плазма поглощает электромагнитные волны с частотой ниже плазменной частоты. Однако здесь есть некоторая тонкость. Ослабление света есть, а поглощения — нет. Плазма в этом частотном диапазоне отражает электромагнитные волны гораздо больше, чем поглощает их.

Дело в том, что глубина проникновения электромагнитных волн в плазму имеет порядок $\frac{1}{\aleph}$, и эта глубина проникновения оказывается гораздо меньше длины электромагнитной волны. Причина такого неравенства состоит в том, что длина волны в плазме оказывается гораздо больше длины волны в вакууме. Длина волны в плазме получается, как результат деления длины волны в вакууме на вещественную часть показателя преломления n', которая очень близка к нулю (мы в приведенных выше выкладках ее просто отбросили, как нулевую). Ранее при рассмотрении стоячих волн мы обсуждали, что в случае, когда глубина проникновения света в среду гораздо меньше длины волны света, оказывается, что свет отражается от среды, а не поглощается средой. Вот свет и отражается от плазмы при условии $\omega < \omega_n$.

Во втором диапазоне световых частот $\omega > \omega_n$ получим:

$$\tilde{n}^2 = 1 - \frac{\omega_n^2}{\omega^2} > 0$$

и показатель преломления — вещественная величина. Отсутствие мнимой части означает нулевой коэффициент поглощения $\aleph = 2\frac{\omega}{c}n'' = 0$, то есть волна проходит среду без ослабления.

Следовательно, плазма прозрачна для света с частотой выше плазменной частоты.

Экзамен. Оптика металлов. Прозрачность сред для рентгеновского излучения.

В металле, как и в плазме, есть свободные электроны. Поэтому взаимодействие света с металлом похоже на взаимодействие света с плазмой.

Металл — твердая фаза вещества, поэтому концентрация свободных электронов в металле гораздо выше, чем в обычной плазме. Плазменная частота зависит от концентрации свободных электронов $\omega_n^2 \equiv 4\pi N \frac{e^2}{m_e}$. В результате плазменная частота ω_n для металлов оказывается в ультрафиолетовом диапазоне частот и соответствующих длин волн. Для более коротких длин волн металл оказывается прозрачным. Характерная длина волны границы прозрачности разных металлов $(150 \div 350)$*нм*.

По этой причине жесткий ультрафиолетовый свет и рентгеновский свет с частотой $\omega > \omega_n$ проходит через металл почти без ослабления, а в видимом диапазоне при условии $\omega < \omega_n$ металлы имеют очень высокий коэффициент поглощения света. При этом свет ослабляется в очень тонком слое $\frac{1}{\aleph}$ порядка $\frac{\lambda}{10}$. Как обсуждалось раньше, ослабление света в слое толщиной гораздо меньше $\frac{\lambda}{2}$ всегда означает высокий коэффициент отражения. Свет отражается, а не поглощается. По этой причине металлы хорошо отражают свет, причем в инфракрасном диапазоне, где длина волны больше, отражение света выше.

Энергия рентгеновского кванта излучения $E = h\nu = \hbar\omega$ оказывается гораздо больше, чем энергия связи внешнего электрона с атомом. В таком случае внешние электроны атома можно считать почти свободными не только у металлов, но и у диэлектриков. Поэтому диэлектрики в рентгеновском диапазоне излучений ведут себя также как и металлы.

В результате рентгеновский свет $\omega > \omega_n$ проходит почти без ослабления не только через металлы, но и через любые вещества. Любое вещество прозрачно в рентгеновском диапазоне излучения.

Термодинамика света.
Экзамен. Абсолютно черное тело.

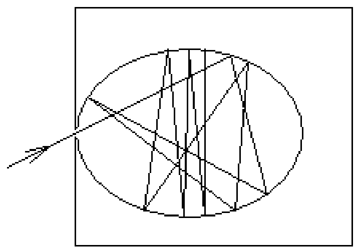
Абсолютно черное тело — это идеализация.

Абсолютно черное тело поглощает весь падающий на его поверхность свет. При этом никакой свет не отражается и не рассеивается.

Поверхность реального тела не может быть абсолютно черной, но можно смоделировать небольшой участок поверхности, который будет вести себя подобно поверхности абсолютно черного тела.

Рассмотрим большую полость внутри непрозрачного тела. Пусть полость соединяется с внешним пространством через малое отверстие. Поверхность, мысленно натянутая на плоскость отверстия, и будет моделью поверхности абсолютно черного тела.

Дело в том, что при малой площади отверстия относительно площади внутренней поверхности полости свет, попадая в отверстие, многократно отражается и рассеивается внутри полости, прежде чем попадает обратно в выходное отверстие. При каждом акте рассеивания и отражения свет частично поглощается стенками полости. В таком случае даже при высоком отражении стенок полости обратно из отверстия свет почти не выходит.



Раньше в других вопросах мы не раз упоминали о световом поле, которое находится в тепловом равновесии с веществом.

Если снаружи в рассматриваемую полость специально не светить, то внутри полости излучение будет находиться в тепловом равновесии со стенками полости.

Нагретое тело излучает свет. Тела при комнатной температуре тоже излучают свет только в инфракрасном диапазоне.

Если стенки рассматриваемой полости нагреть, то из отверстия будет выходить свет, который называют излучением абсолютно черного тела.

Экзамен. Закон Кирхгофа.

Смысл закона Кирхгофа в том, что хорошо светится только черное тело.

Если тело плохо поглощает свет, то оно и излучает мало. Например, прозрачный кристалл при нагревании светится слабо, а черное тело при нагревании до той же температуры светится ярко. Зеркало при нагревании тоже плохо светится. Нагретый белый мел хуже светится, чем нагретый черный уголь.

Закон Кирхгофа — это опытный факт, но его можно обосновать исходя из термодинамики, если рассмотреть термодинамическое равновесие света и вещества при некоторой температуре. Смысл рассмотрения в том, что, сколько света поглощается, столько должно и излучаться, чтобы температура тела не изменялась в условиях равновесия. Хорошо поглощает свет черное тело, значит, оно и излучать будет хорошо.

Для описания излучения поверхности тела вводят понятие светимости R. Светимость — это плотность потока энергии или энергия, которая в единицу времени излучается единицей площади поверхности. Это понятие очень близко понятию освещенности поверхности E. Освещенность — это тоже энергия в единицу времени через единицу площади, только для падающего на поверхность света, а не для света, излучаемого поверхностью. Оба понятия близки к понятию интенсивности света, которая тоже представляет собой энергию в единицу времени через единицу площади, только интенсивность рассматривается для света, который идет почти в одном направлении, а светимость и освещенность применимы для любого распределения света по направлениям. Если свет падает перпендикулярно на экран, то освещенность экрана равна интенсивности падающего света. Если свет падает под углом, то освещенность меньше интенсивности падающего света, их отношение равно косинусу угла падения.

В отличие от интенсивности света освещенность характеризует падение света на поверхность из телесного угла 2π, а светимость характеризует излучение света поверхностью в телесный угол 2π.

Факультативная вставка.

Понятия освещенности E и светимости R относятся к разделу оптики — фотометрия. В фотометрии также вводятся I — сила света и B — яркость источника света.

Для источника света вводится величина силы света $I \equiv \dfrac{dW}{dt d\Omega}$ — энергия, излучаемая в единицу времени в единичный телесный угол. Сила света удобна для описания точечного источника света, например звезды. Для излучения звезды сила света не зависит от расстояния до звезды. Для любого источника света в приближении геометрической оптики сила света не засит от расстояния до источника света.

Освещенность поверхности, создаваемая точечным источником света, $E = \dfrac{I\cos\alpha}{r^2}$ определяется силой света источника I, углом падения света на поверхность α и расстоянием от источника до поверхности r. Эту формулу можно объяснить, если в ней силу света заменить ее определением $E = \dfrac{dW}{dtd\Omega}\cdot\dfrac{\cos\alpha}{r^2}$, и телесный угол $d\Omega$ заменить его определением $d\Omega \equiv \dfrac{dS_{\perp\vec{r}}}{r^2}$. Тогда

$$E = \frac{r^2}{dS_{\perp\vec{r}}}\cdot\frac{dW}{dt}\cdot\frac{\cos\alpha}{r^2} = \frac{dW}{dt}\cdot\frac{\cos\alpha}{dS_{\perp\vec{r}}}.$$

Здесь $dS = \dfrac{dS_{\perp\vec{r}}}{\cos\alpha}$ — площадь освещаемой поверхности. Тогда $E = \dfrac{dW}{dtdS}$ в соответствии с определением освещенности E.

Яркость (излучения) поверхности или яркость света $B \equiv \dfrac{dW}{dtd\Omega dS\cos\alpha}$ — энергия, излучаемая в единицу времени в единичный телесный угол и с единицы площади поверхности. Здесь α — угол между нормалью к поверхности и направлением излучения. Косинус в знаменателе удобен, потому что площадь dS видна из направления α, как $dS\cos\alpha$. Обычно введенная таким образом яркость излучения с поверхности источника света не зависит от направления — это закон Ламберта. Например, солнечный диск имеет одинаковую яркость и в центре диска и на краю диска. Для ламбертовского источника света его светимость (в телесный угол 2π) и яркость связаны простым соотношением $R = \pi B$.

В фотометрии принято рассматривать оптические величины с учетом чувствительности глаза. Так, например, для энергии, которая падает на поверхность в единицу времени (световой поток), вместо Ватта принята единица люмен. Для длины волны света, которая соответствует максимальной чувствительности глаза ($\lambda = 555\textit{нм}$), 1 Ватт = 683 люмена. Для других длин волн в одном Ватте люменов будет меньше. Освещенность, светимость и яркость измеряется в люксах. Один люкс равен одному люмену на квадратный метр $1\textit{лк} = \dfrac{1\textit{лм}}{1\textit{м}^2}$. Сила света измеряется в канделах.

Такие единицы имеют смысл для того, чтобы оценить, насколько удобно освещение для человеческого глаза. На самом деле освещение в столько-то люксов никак не гарантирует удобства для человека, если, например, это будет освещение синим светом или красным. Будучи последовательными нужно было бы ввести в рассмотрение раздельно синие люксы, зеленые люксы и красные люксы. Кроме того, можно было бы ввести еще и серые люксы для сумеречной освещенности, когда нет цветового восприятия. Вместо этого введено понятие цветовой температуры источника света, но мощность источника и цветовая температура — это два параметра, а для корректного описания нужны три параметра: мощность синего света, мощность зеленого и мощность красного.

Если свет регистрируется объективными приемниками света, а не глазом, то удобно отказаться от люменов вообще и говорить только об энергетических единицах — Ваттах.

Конец факультативной вставки.

Для закона Кирхгофа нам понадобится понятие коэффициента поглощения поверхности, который показывает, какая часть света поглощается поверхностью. Пусть $a(\nu)$ — коэффициент поглощения поверхности, он зависит от частоты света ν. Коэффициент поглощения поверхности равен отношению поглощенной энергии к энергии, падающей световой волны, — это безразмерная величина. В отличие от коэффициента поглощения среды $\aleph$, который входит в закон Бугера $I(z)=I_0 e^{-\aleph z}$ и который имеет размерность обратной длины.

Для закона Кирхгофа представляет интерес величина спектральной плотности светимости $r_\nu = \frac{dR}{d\nu}$, которую называют также испускательной способностью поверхности (излучательной способностью поверхности). В случае термодинамического равновесия излучения с веществом спектральная плотность светимости связана со спектральной плотностью освещенности $e_\nu = \frac{dE}{d\nu}$ соотношением $a(\nu)\cdot e_\nu = r_\nu$. Это равенство означает, что при термодинамическом равновесии на каждой частоте света, сколько энергии поглощается поверхностью столько и излучается.

Соответственно, закон Кирхгофа утверждает, что отношение испускательной способности поверхности к ее коэффициенту поглощения $\frac{r_\nu(T)}{a(\nu)}$ не зависит от свойств поверхности, а зависит только от частоты света ν и от температуры поверхности T. Это отношение равно спектральной плотности освещенности e_ν при термодинамическом равновесии света и вещества. Спектральная плотность освещенности e_ν при термодинамическом равновесии света и вещества не зависит от свойств вещества. При каждой температуре есть некоторое равновесное состояние света, и сколько этого света падает в единицу времени на единицу площади поверхности — это никак не зависит от свойств поверхности.

Соотношение

$$\frac{r_\nu(T)}{a(\nu)} = e_\nu(T)$$

является количественным выражением закона Кирхгофа. Оно показывает, что чем больше коэффициент поглощения света $a(\nu)$ (чем чернее тело), тем больше испускательная способность поверхности $r_\nu(T)$ (тем ярче оно светит), так как их отношение $e_\nu(T)$ не зависит от свойств поверхности. Оказывается, что отношение $\dfrac{r_\nu(T)}{a(\nu)}$ имеет одинаковое значение, например, для белого мела, черного угля, прозрачного кристалла и металлического зеркала.

Факультативная вставка.

Спектральную плотность освещенности e_ν в законе Кирхгофа обычно выражают через спектральную плотность объемной плотности энергии светового поля. Обсудим это выражение.

В кинетической теории газов доказывается, что плотность потока молекул $J = \dfrac{N \cdot \langle V \rangle}{4}$, где N — концентрация молекул, $\langle V \rangle = \sqrt{\dfrac{8k_Б T}{\pi m}}$ — средняя скорость молекул. Выражение $J = \dfrac{N \cdot \langle V \rangle}{4}$ справедливо независимо от распределения Максвелла по скоростям молекул. Оно является следствием одной изотропности распределения молекул по скоростям.

Заменим $N \to w_\nu$ и $\langle V \rangle \to c$. Здесь $w_\nu = \dfrac{dw}{d\nu}$ — спектральная плотность объемной плотности энергии, . Тогда вместо количества частиц получим энергию в единичном интервале частот. Вместо плотности потока молекул $J = \dfrac{N \cdot \langle V \rangle}{4}$ получим $\dfrac{w_\nu(T) \cdot c}{4}$ — плотность потока спектральной плотности энергии или энергию, которая в единицу времени в единичном интервале частот проходит через единичную площадку (в одну сторону). Это и есть спектральная плотность освещенности e_ν.

В случае термодинамического равновесия света и поверхности вещества получаем:

$$\frac{w_\nu(T) \cdot c}{4} \cdot a(\nu) = r_\nu(T)$$

или

$$\frac{r_\nu(T)}{a(\nu)} = \frac{w_\nu(T) \cdot c}{4}$$

— это более традиционное математическое выражение закона Кирхгофа.

Конец факультативной вставки.

Экзамен. Закон Стефана-Больцмана.

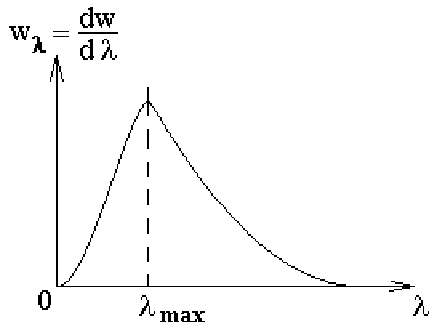
Светимость абсолютно черного тела пропорциональна четвертой степени температуры — это опытный факт, это и есть закон Стефана-Больцмана.

$$R(T) \equiv \int_0^{+\infty} r_\nu(\nu, T) \cdot d\nu = \sigma T^4 \qquad \Rightarrow \qquad R = \sigma T^4 .$$

Здесь σ — постоянная Стефана-Больцмана. Стефан открыл закон экспериментально, Больцман позднее обосновал его теоретически.

Экзамен. Закон смещения Вина.

Рассмотрим распределение излучения абсолютно черного тела по длинам волн.



Назовем $\lambda_{\max}$ такую длину волны, при которой $w_\lambda = \max$ (при $\lambda = \lambda_{\max}$).

Тогда закон смещения Вина утверждает, что $\lambda_{\max} \sim \frac{1}{T}$ или $\lambda_{\max} = \frac{b}{T}$, где b — константа. Закон смещения Вина — опытный факт.

Факультативная вставка.

Из равенства $\lambda \nu = c$, если его продифференцировать и разделить на произведение $\lambda \nu$, следует $\left|\frac{d\lambda}{\lambda}\right| = \left|\frac{d\nu}{\nu}\right|$. Тогда $\left|\frac{d\lambda}{d\nu}\right| = \frac{\lambda}{\nu}$ и

$$w_\nu = \frac{dw}{d\nu} = \frac{dw}{d\lambda} \cdot \left|\frac{d\lambda}{d\nu}\right| = \frac{dw}{d\lambda} \cdot \frac{\lambda}{\nu} = w_\lambda \cdot \frac{\lambda}{\nu} \qquad \Rightarrow$$

$$\nu \cdot w_\nu = \lambda \cdot w_\lambda .$$

Если при $w_\nu = \max$ обозначить $\nu = \nu_{\max}$, то с использованием формулы Планка можно доказать, что $\nu_{\max} \sim T$ или $\nu_{\max} = b'T$.

Конец факультативной вставки.

Экзамен. Формула Планка.

Спектр излучения абсолютно черного тела описывается формулой Планка

$$w_\nu(T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_Б T}} - 1} \qquad (1).$$

Здесь $w_\nu \equiv \frac{dW}{dVd\nu}$ — спектральная плотность объемной плотности $w \equiv \frac{dW}{dV}$ энергии электромагнитного поля W, ν — частота электромагнитного поля. Спектральная плотность объемной плотности энергии w_ν рассматривается при термодинамическом равновесии света с веществом.

В формуле Планка $\dfrac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_Б T}}-1}$ — среднее число фотонов в одном состоянии, то есть в одном объеме когерентности; $h\nu$ — энергия фотона; $\dfrac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_Б T}}-1}$ — средняя энергия света в одном состоянии; число возможных состояний в единичном интервале частот пропорционально ν^2.

В формуле Планка вместо распределения по частотам ν иногда рассматривают распределение по циклическим частотам $\omega = 2\pi\nu$ (хорошо еще, что по длинам волн не рассматривают). Объемная плотность энергии в интервале циклических частот $d\omega = 2\pi\, d\nu$ и в интервале обычных частот $d\nu$ — это одна и та же объемная плотность энергии $dw = w_\omega d\omega = w_\nu d\nu$. Тогда $w_\omega = \dfrac{d\nu}{d\omega} w_\nu = \dfrac{1}{2\pi} w_\nu$. Соответственно в формуле для w_ω правая часть будет меньше в 2π раз, чем в формуле (1) для w_ν. И это тоже формула Планка:

$$w_\omega(T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_Б T}}-1}.$$

Вместо объемной плотности спектральной плотности энергии w_ν в формуле Планка иногда рассматривается спектральная плотность светимости $r_\nu = \dfrac{dR}{d\nu} = \dfrac{dW}{dt dS d\nu}$ абсолютно черного тела, которая называется испускательной способностью и равна энергии, которая в единицу времени излучается единицей площади поверхности в единичном интервале частот. Испускательная способность абсолютно черного тела равна спектральной плотности освещенности $e_\nu = \dfrac{dE}{d\nu} = \dfrac{dW}{dt dS d\nu}$ при термодинамическом равновесии излучения и вещества. Мы уже обсуждали, что для излучения абсолютно черного тела $r_\nu = \dfrac{w_\nu c}{4}$ аналогично тому, как в кинетической теории газов плотность потока молекул равна $J = \dfrac{N \cdot \langle V \rangle}{4}$, где N — концентрация молекул, $\langle V \rangle = \sqrt{\dfrac{8 k_Б T}{\pi m}}$ — средняя скорость молекул. Соответственно формула Планка может быть еще в двух формах с правой частью, в которой есть дополнительный сомножитель $\dfrac{c}{4}$:

$$r_\nu(T) = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \cdot \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_Б T}}-1} \qquad \text{и} \qquad r_\omega(T) = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} \cdot \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_Б T}}-1}.$$