Экзамен. Закон Стефана — Больцмана.

Светимость абсолютно черного тела пропорциональна четвертой степени температуры — это опытный факт, это и есть закон Стефана — Больцмана.

$$R(T) \equiv \int_0^{+\infty} r_\nu(T) \cdot d\nu = \sigma T^4 \qquad => \qquad R = \sigma T^4.$$

Здесь σ — постоянная Стефана — Больцмана. Стефан открыл закон экспериментально, Больцман позднее обосновал его теоретически.

Факультативная вставка.

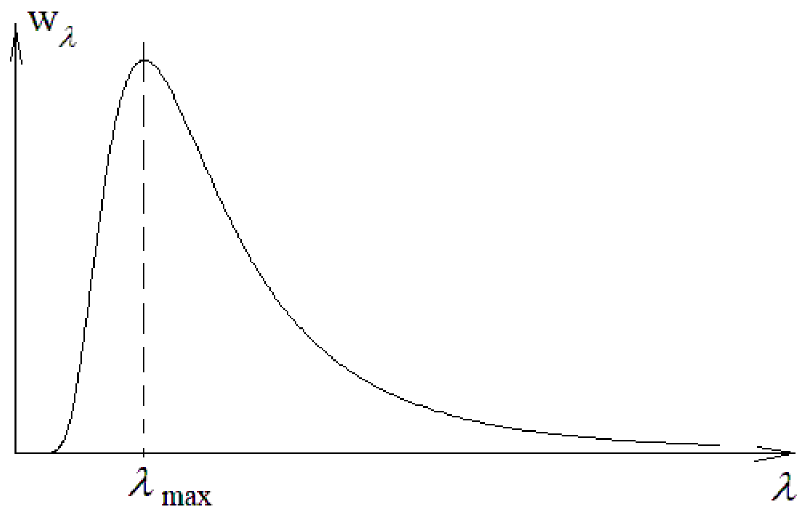
Опираясь на формулу Планка, можно доказать, что

$\sigma = \dfrac{2\pi^5 k_Б^4}{15h^3c^2}$, где $k_Б$ — постоянная Больцмана.

Конец факультативной вставки.

Экзамен. Закон смещения Вина.

Рассмотрим распределение излучения абсолютно черного тела по длинам волн.



Назовем λ_{max} такую длину волны, при которой $w_\lambda = \max$ (при $\lambda = \lambda_{max}$).

Тогда закон смещения Вина утверждает, что $\lambda_{max} \sim \dfrac{1}{T}$ или $\lambda_{max} = \dfrac{b}{T}$, где b — константа. Закон смещения Вина — опытный факт.

Факультативная вставка.

Одну и ту же энергию можно представить через спектральную плотность по частотам и через спектральную плотность по длинам волн. Соответственно $w_\nu d\nu = w_\lambda d\lambda$.

Из равенства $\lambda\nu = c$, если его продифференцировать и разделить на произведение $\lambda\nu$, следует $\left|\dfrac{d\lambda}{\lambda}\right| = \left|\dfrac{d\nu}{\nu}\right|$. Тогда $\left|\dfrac{d\lambda}{d\nu}\right| = \dfrac{\lambda}{\nu}$, и из равенства $w_\nu d\nu = w_\lambda d\lambda$ следует равенство $\nu w_\nu = \lambda w_\lambda$.

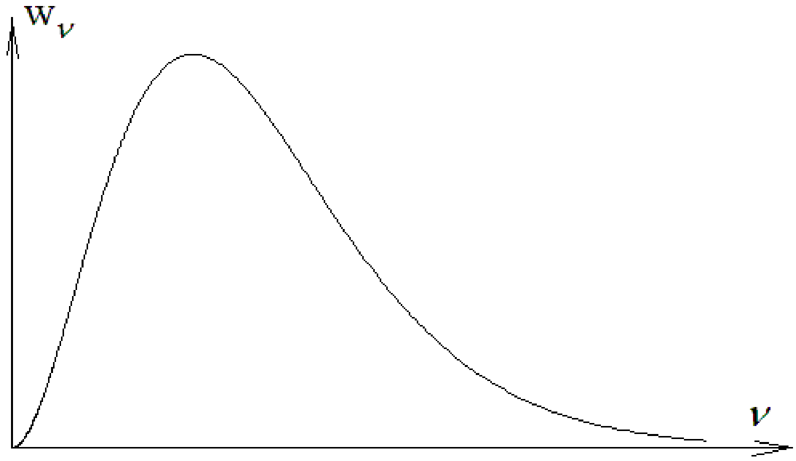
Если частоту света при условии $w_\nu = \max$ обозначить как $\nu_{\max}$, то с помощью формулы Планка можно доказать, что $\nu_{\max} \sim T$ или $\nu_{\max} = b'T$.

Конец факультативной вставки.

Экзамен. Формула Планка.

Спектр излучения абсолютно черного тела описывается формулой Планка

$$w_\nu(T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_Б T}} - 1} \qquad (1).$$



Здесь W — энергия электромагнитного поля, $w \equiv \frac{dW}{dV}$ — объемная плотность энергии, $w_\nu \equiv \frac{dW}{dVd\nu}$ — спектральная плотность объемной плотности энергии при термодинамическом равновесии света с веществом.

В формуле Планка $\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_Б T}} - 1}$ — среднее число фотонов в одном состоянии, то есть в одном объеме когерентности; $h\nu$ — энергия фотона; $\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_Б T}} - 1}$ — средняя энергия света в одном состоянии. Число возможных состояний в единичном интервале частот пропорционально ν^2 аналогично тому, как в распределении Максвелла по модулю скорости число состояний в единичном интервале скоростей пропорционально V^2.

Факультативная вставка.

Вместо объемной плотности спектральной плотности энергии w_ν в формуле Планка иногда рассматривается спектральная плотность светимости $r_\nu = \frac{dR}{d\nu} = \frac{dW}{dtdSd\nu}$ абсолютно черного тела, которая называется испускательной способностью и равна энергии, которая в единицу времени излучается единицей площади поверхности в единичном интервале частот. Испускательная способность абсолютно черного тела равна спектральной плотности освещенности $e_\nu = \dfrac{dE}{d\nu} = \dfrac{dW}{dtdSd\nu}$ при термодинамическом равновесии излучения и вещества. Мы уже обсуждали, что для излучения абсолютно черного тела $e_\nu = \dfrac{w_\nu c}{4}$ аналогично тому, как в кинетической теории газов плотность потока молекул равна $J = \dfrac{N \cdot \langle V \rangle}{4}$, где N — концентрация молекул, $\langle V \rangle = \sqrt{\dfrac{8k_Б T}{\pi m}}$ — средняя скорость молекул. Соответственно формула Планка может быть еще в двух формах с правой частью, в которой есть дополнительный сомножитель $\dfrac{c}{4}$:

$$e_\nu(T) = r_\nu(T) = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \cdot \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_Б T}} - 1}. \qquad (2)$$

При соблюдении закона Ламберта светимость R связана с яркостью B соотношением $R = \pi B$. Закон Ламберта выполняется в частности и для абсолютно черного тела. Это же соотношение справедливо между спектральной плотностью светимости и спектральной плотностью яркости $r_\nu = \pi b_\nu$. Соответственно формула Планка может быть еще в одном виде:

$$b_\nu(T) = \frac{2\nu^2}{c^2} \cdot \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_Б T}} - 1}. \qquad (3)$$

В формуле Планка вместо распределения по частотам ν иногда рассматривают распределение по циклическим частотам $\omega = 2\pi\nu$. Объемная плотность энергии в интервале циклических частот $d\omega = 2\pi\, d\nu$ и в интервале обычных частот $d\nu$ — это одна и та же объемная плотность энергии $dw = w_\omega d\omega = w_\nu d\nu$. Тогда $w_\omega = \dfrac{d\nu}{d\omega} w_\nu = \dfrac{1}{2\pi} w_\nu$. Соответственно в формуле 1 для w_ω правая часть будет в 2π раз меньше, чем в формуле (1) для w_ν. И это тоже формула Планка:

$$w_\omega(T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_Б T}} - 1}. \qquad (4)$$

Аналогично для формул 2 и 3:

$$e_\omega(T) = r_\omega(T) = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} \cdot \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_Б T}} - 1} \qquad (5)$$

$$b_{\omega}(T)=\frac{\omega^2}{4\pi^3c^2}\cdot\frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_Б T}}-1}. \qquad (6)$$

Каждую из этих трех формул (4-6) тоже называют формулой Планка.

Кроме приведенных выше 6 форм формулу Планка можно записать еще в 3-х формах, если с учетом $\nu\cdot w_{\nu}=\lambda\cdot w_{\lambda}$ перейти от частот к длинам волн:

$$w_{\lambda}(T)=\frac{8\pi hc}{\lambda^5}\cdot\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_Б T}}-1} \qquad (7)$$

$$e_{\lambda}(T)=r_{\lambda}(T)=\frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\cdot\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_Б T}}-1} \qquad (8)$$

$$b_{\lambda}(T)=\frac{2hc^2}{\lambda^5}\cdot\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_Б T}}-1}. \qquad (9)$$

Зачастую в литературе приводится одна из первых 6-и формул Планка без каких-либо пояснений, какая именно формула имеется в виду.

Конец факультативной вставки.

Экзамен. Дифракция рентгеновских лучей на кристалле. Лауэграммы.

Рентгеновское излучение может рассеиваться упруго (дифракция) и неупруго (эффект Комптона).

При упругом рассеянии на кристалле или дифракции рентгеновских лучей каждый рентгеновский квант рассеивается не на конкретном электроне, а сразу на всем кристалле, как на трехмерной дифракционной решетке. Кристалл тяжелый по сравнению с одним электроном, поэтому отдача импульса, которую испытывает кристалл, передает ему очень малую энергию $\frac{p^2}{2M}$, где p изменение импульса рентгеновского фотона, M — масса кристалла. Поэтому энергия и частота рентгеновского фотона при рассеянии фотона всем кристаллом почти не изменяется.

Электромагнитная волна рассеивается, как волна вероятности поймать рассеянный рентгеновский квант. Вероятность поймать квант в любой точке пространства пропорциональна квадрату модуля комплексной амплитуды рассеянной волны или пропорциональна интенсивности рассеянной волны.

Свет видимого диапазона имеет большую длину волны и на кристалле не рассеивается, так как дифракционные максимумы решетки появляются только в том случае, если шаг решетки больше половины длины волны света $d>\frac{\lambda}{2}$.

Пусть на кристалл падает параллельный пучок монохроматических рентгеновских лучей, которому соответствует плоская монохроматическая волна.

Кристалл состоит из повторяющихся в правильном порядке узлов. В простейшем случае узел кристалла содержит один атом, но узел может содержать и несколько атомов, например, разных элементов периодической системы Менделеева. Расстояние между этими атомами одного порядка с расстоянием между соседними узлами кристалла. Излучение рассеянное разными узлами в направлении дифракционного максимума должно быть синфазно.

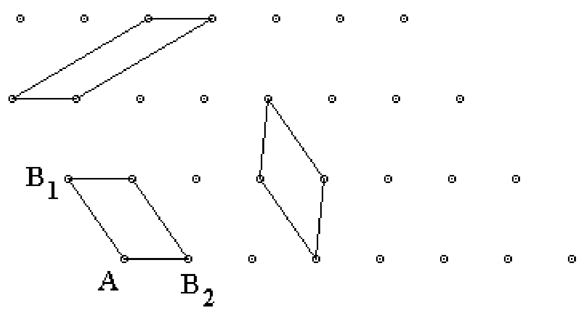
Кристалл — это правильная периодическая структура. В одномерном случае период один, а в трехмерном случае — три периода. То есть в кристалле есть три необязательно ортогональных направления не лежащих в одной плоскости, и в этих трех направлениях есть три разных периода.

Следовательно, независимо от структуры кристалла его всегда можно представить, как повторяющиеся так называемые примитивные ячейки в виде одинаковых параллелепипедов. В каждой вершине параллелепипеда находятся узлы кристалла.

И действительно, мысленно проведем из одного узла кристалла векторы к трем другим узлам вдоль трех периодов кристалла. На этих трех векторах можно построить параллелепипед. Если внутри параллелепипеда не будет ни одного узла, то этот параллелепипед и будет примитивной ячейкой кристалла.

Для начала проще представить структуру кристалла в двумерном случае. Тогда ячейки кристалла будут одинаковыми параллелограммами.

Примитивную ячейку кристалла можно выбрать разными способами, что видно из нижеследующего рисунка.



На рисунке приведены возможные варианты примитивных ячеек для одного и того же двумерного кристалла.

Элементарная ячейка кристалла может совпадать с примитивной ячейкой или быть больше ее. Элементарная ячейка кристалла должна обладать всеми элементами симметрии всего кристалла. Далее нас будет интересовать только примитивная ячейка кристалла.

Для синфазности света рассеянного всеми узлами кристалла необходимо и достаточно, чтобы были синфазны волны, рассеянные всеми узлами одной примитивной ячейки кристалла.

На примере одной из ячеек видно, что для синфазности волн, рассеянных всеми узлами одной ячейки, необходимо и достаточно, чтобы синфазными были волны рассеянные узлами A, B_1, B_2, которые расположены на двух сторонах AB_1 и AB_2, выходящих из одного узла A.

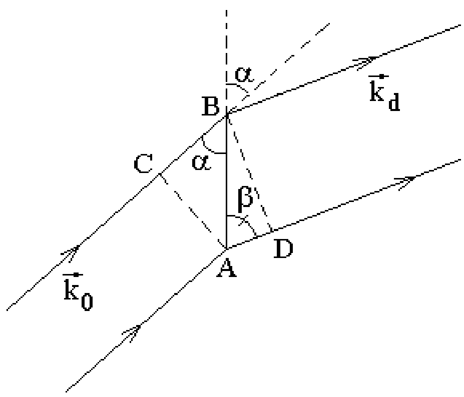
Аналогично в трехмерном случае нужно чтобы были синфазны волны рассеянные узлами A, B_1, B_2, B_3, расположенными на трех ребрах AB_1, AB_2, AB_3, выходящими из одного узла A.

Рассмотрим, в каком случае рассеяние узлами A, B_1, B_2, B_3 будет синфазно.

Введем обозначение: $\begin{cases} \vec{d}_1 \equiv \overrightarrow{AB_1} \\ \vec{d}_2 \equiv \overrightarrow{AB_2} \\ \vec{d}_3 \equiv \overrightarrow{AB_3} \end{cases}$.

Пусть $\vec{k}_0$ — волновой вектор падающей на кристалл рентгеновской волны, $\vec{k}_d$ — волновой вектор упруго рассеянной волны или дифрагированной волны.

Рассмотрим рассеяние в направлении $\vec{k}_d$ на двух узлах, которые связаны вектором $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$. Три вектора $\vec{k}_0$, $\vec{d}$ и $\vec{k}_d$ не обязательно лежат в одной плоскости.



Проведем через узел A перпендикуляр к падающей волне $\vec{k}_0$ до луча, идущего в узел B, и получим точку C. Проведем через узел B перпендикуляр к рассеянному лучу $\vec{k}_d$ до луча, рассеянного узлом A, и получим точку D.

Обозначим углы: $\alpha \equiv \left(\widehat{\vec{k}_0, \vec{d}}\right)$ — угол между лучом падающей волны $\vec{k}_0$ и ребром примитивной ячейки кристалла $\vec{d}$, $\beta \equiv \left(\widehat{\vec{k}_d, \vec{d}}\right)$ — угол между рассеянным лучом $\vec{k}_d$ и ребром $\vec{d}$.

Разность хода лучей рассеянных на узлах A и B равна:

$$\Delta = BC - AD = AB \cdot \cos(\alpha) - AB \cdot \cos(\beta) = \left(\cos(\alpha) - \cos(\beta)\right) \cdot d .$$

Синфазность рассеянных узлами A и B волн означает, что разность хода кратна длине волны:

$$\Delta = m\lambda \qquad => \qquad \left(\cos(\alpha) - \cos(\beta)\right) \cdot d = m\lambda,$$

где m — целое число.

Для трех ребер примитивной ячейки кристалла получим три уравнения:

$$\begin{cases} \left(\cos(\alpha_1) - \cos(\beta_1)\right) \cdot d_1 = m_1\lambda \\ \left(\cos(\alpha_2) - \cos(\beta_2)\right) \cdot d_2 = m_2\lambda \\ \left(\cos(\alpha_3) - \cos(\beta_3)\right) \cdot d_3 = m_3\lambda \end{cases}.$$

Здесь d_1, d_2, d_3 — длины ребер примитивной ячейки кристалла; m_1, m_2, m_3 — целые числа;

$$\alpha_i \equiv \left(\widehat{\vec{k}_0, \vec{d}_i}\right);$$

$$\beta_i \equiv \left(\widehat{\vec{k}_d, \vec{d}_i}\right).$$

Мы получили систему из трех уравнений для трех неизвестных углов $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, которые задают направление дифракции рентгеновских лучей. Однако, чтобы задать направление, достаточно двух углов, а не трех. Вспомним, например, сферические координаты. Следовательно, три угла $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, определяющие направление дифракции не являются независимыми переменными.

И действительно, задание углов β_1 и β_2 оставляет только два возможных значения для угла β_3. Это видно, если рассмотреть пересечение двух конусов с вершинами в точке A, построенных вокруг векторов $\overrightarrow{AB_1} = \vec{d}_1$ и $\overrightarrow{AB_2} = \vec{d}_2$ с угловыми радиусами β_1 и β_2. Вектор $\vec{k}_d$ должен находится на поверхности каждого из двух конусов. Линии пересечения конусов — это и есть два варианта направления $\vec{k}_d$, которым соответствуют два возможных угла β_3 при заданных β_1 и β_2.

Три уравнения $\begin{cases} \left(\cos(\alpha_1) - \cos(\beta_1)\right) \cdot d_1 = m_1\lambda \\ \left(\cos(\alpha_2) - \cos(\beta_2)\right) \cdot d_2 = m_2\lambda \\ \left(\cos(\alpha_3) - \cos(\beta_3)\right) \cdot d_3 = m_3\lambda \end{cases}$ нужно рассматривать, как систему относительно трех неизвестных, но эти неизвестные не три угла $\beta_1, \beta_2, \beta_3$. Эти неизвестные $\beta_1, \beta_2, \lambda$.

Если кристалл освещать монохроматическим рентгеновским излучением с заданной длиной волны λ, то дифракционных максимумов может не быть вовсе, если окажется, что λ из решения системы не совпадает с λ излучения. Дифракционные максимумы появляются только для некоторых значений длин волн λ.

При облучении кристалла рентгеновским излучением со сплошным спектром кристалл сам выберет длины волн, для которых возможны дифракционные максимумы. В разные дифракционные максимумы пойдет излучение с разными длинами волн.

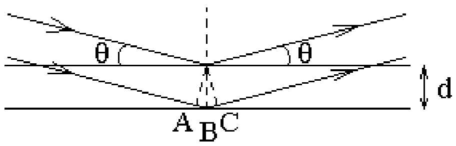
Картина дифракционных максимумов — это и есть лауэграмма.

Обычно для получения лауэграммы берут маленький кристалл, например, размером один миллиметр. Кристалл ставят в рентгеновский пучок лучей, а за кристаллом на расстоянии гораздо больше одного миллиметра ставят фотопластинку. Изображение на фотопластинке и будет лауэграммой.

Экзамен. Условие Вульфа — Брэгга для дифракции монохроматических рентгеновских лучей на поликристаллическом порошке.

Если для получения лауэграмм используется рентгеновское излучение со сплошным спектром, то в данном случае рассматривается дифракция монохроматического излучения. Вместо всех возможных длин волн в данном случае используются все возможные ориентации крупинки кристалла в порошке относительно направления падающей волны.

Согласно Вульфу и Брэггу, если излучение зеркально отраженное от двух соседних плоскостей узлов кристалла синфазно, то в этом направлении будет дифракционный максимум.



На рисунке изображены две горизонтальные параллельные плоскости узлов, d — расстояние между плоскостями, θ — угол скольжения падающего излучения.

Разность хода лучей отраженных от двух плоскостей равна

$\Delta = AB + BC = 2d \cdot \sin(\theta)$.

Условие синфазности отраженных плоскостями волн

$\Delta = m\lambda$,

где m — целое число.

Объединяя оба равенства, получим

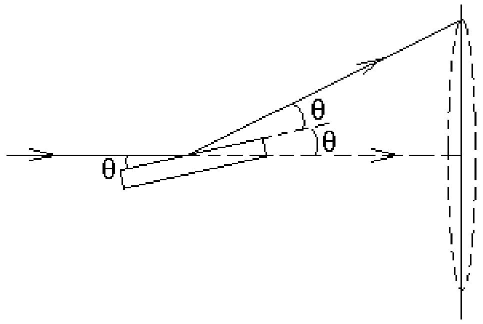
$2d \cdot \sin(\theta) = m\lambda$ — это и есть условие Вульфа-Брэгга.

Здесь m — целое число, d — межплоскостное расстояние, θ — угол скольжения.

Эксперимент ставится следующим образом.

На небольшой образец поликристаллического порошка направляют монохроматический параллельный рентгеновский пучок лучей. За порошком перпендикулярно падающему лучу ставят фотопластинку на расстоянии гораздо большем диаметра пучка лучей и размеров поликристаллического образца.

Схема опыта имеет осевую симметрию. Следовательно, дифракционная картина также будет иметь осевую симметрию. Дифракционная картина — концентрические кольца. Как видно из нижеследующего рисунка, угловой радиус кольца равен 2θ.



<u>Факультативная вставка.</u>

Рассмотрим, как условие Вульфа-Брэгга соотносится с условием Лауэ.

Покажем, что условие Вульфа-Брэгга достаточно для выполнения условия Лауэ:

(В-Б) => (Л).

Рассмотрим примитивную ячейку кристалла, как это делает Лауэ. Рассмотрим плоскость узлов, которая является продолжением одной из граней примитивной ячейки. В качестве параллельной плоскости узлов рассмотрим плоскость второй параллельной грани примитивной ячейки.

Лучи, зеркально отражающиеся от одной плоскости, всегда отражаются синфазно, поэтому плоское зеркало и отражает зеркально. Выберем ребра $\overrightarrow{AB_1} = \vec{d}_1$ и $\overrightarrow{AB_2} = \vec{d}_2$ в первой плоскости узлов. Тогда при выполнении условия Вульфа-Брэгга излучение, рассеянное узлами A, B_1, B_2, будет синфазно, так как эти узлы лежат в первой плоскости узлов, и все точки этой плоскости излучают синфазно в направлении зеркального отражения от плоскости.

Если по условию Вульфа-Брэгга от второй плоскости узлов излучение отражается синфазно излучению, отраженному от первой плоскости, то каждая точка второй плоскости излучает в направлении зеркального отражения синфазно каждой точки первой плоскости. Узел B_3 по построению лежит во второй плоскости узлов, следовательно, рассеянное им излучение в направлении зеркального отражения от плоскости синфазно рассеянному излучению в этом направлении узлами A, B_1, B_2.

Таким образом, мы показали, что при выполнении условия Вульфа-Брэгга автоматически выполняются условия Лауэ.

Обратное несправедливо.

Дифракционные максимумы Лауэ заведомо не отвечают условию Вульфа-Брэгга, если направление дифракции не лежит в плоскости падения ни для одной из граней примитивной ячейки кристалла. В таком случае при повороте кристаллической крупинки вокруг оси перпендикулярной плоскости узлов кристалла дифракционный максимум пропадает. Соответственно, крупинок, которые формируют максимум в данном направлении, окажется очень мало.

При вращении кристаллической крупинки вокруг падающего луча дифракционный максимум Лауэ формирует на фотопластинке дифракционное кольцо. Однако видны (заметны) только те кольца, которые отвечают условию Вульфа-Брэгга.

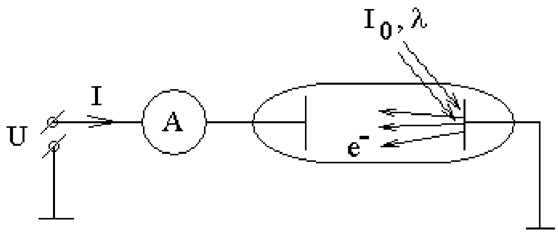
Если направление дифракции удовлетворяет условию Вульфа-Брэгга, то при поворотах кристаллической крупинки вокруг оси перпендикулярной плоскости узлов кристалла условие Вульфа-Брэгга сохраняется.

Конец факультативной вставки.

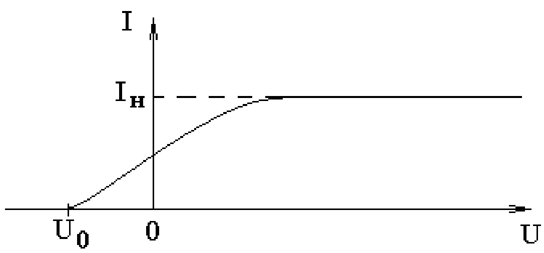
Экзамен. Фотоэффект. Опыты Столетова. Красная граница фотоэффекта. Формула Эйнштейна.

Фотоэффект — выбивание светом электронов из вещества.

Столетов измерял зависимость фототока тока I от напряжения U, длины волны света λ и интенсивности света I_0 в следующей схеме эксперимента.



Экспериментально наблюдалась следующая зависимость фототока от напряжения:



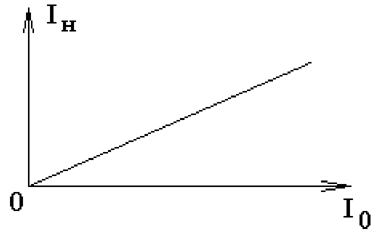
Рассмотрим график подробнее.

При нулевом напряжении $U = 0$ в схеме течет ток, так как электроны, выбитые светом из правого электрода, частично прилипают к левому электроду, образуя электрический ток.

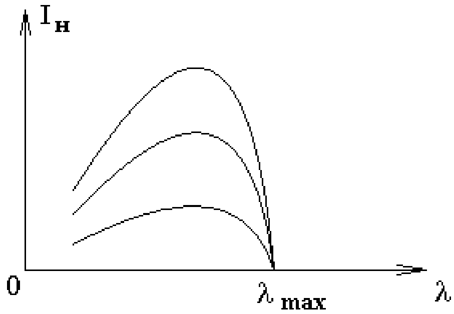
Чтобы ток электронов остановить, нужно приложить запирающее напряжение U_0, которое отталкивает подлетающие электроны. Это напряжение U_0 позволяет вычислить максимальную скорость выбиваемых электронов:

$\left|eU_0\right| = \dfrac{mV_{\max}^2}{2}$ — ток электронов прекращается, когда источник запирающего напряжения забирает всю кинетическую энергию выбитых электронов.

При некотором положительном напряжении все выбитые светом из первого электрода электроны собираются на втором электроде. При таком и более положительном напряжении ток достигает значения своего насыщения $I_н$. Из экспериментов Столетова следовало, что ток насыщения $I_н$ пропорционален интенсивности света I_0.



Другой экспериментальный график зависимости тока насыщения $I_н$ от длины волны света λ при разных значениях интенсивностях света I_0:



Если длина волны света больше некоторого максимального значения $\lambda > \lambda_{\max}$, то фототока нет независимо от интенсивности падающего на электрод света.

Наличие $\lambda_{\max}$ называют красной границей фотоэффекта.

Эйнштейн объяснил наличие красной границы фотоэффекта и дал интерпретацию результатов опытов, предположив, что свет может поглощаться только порциями энергии $h\nu = \hbar\omega$ или квантами.

Тогда по закону сохранения энергии получаем

$$h\nu = A_{вых} + \frac{mV_{\max}^2}{2}$$ — формулу Эйнштейна для фотоэффекта.

Здесь $h\nu$ — энергия кванта света, которая расходуется на работу выхода электрона из вещества $A_{вых}$ и остается в виде кинетической энергии электрона $\frac{mV^2}{2}$. До выхода из вещества электрон может растерять часть энергии при неупругих столкновениях с другими электронами и ионами металла. Если электрон не потерял никакой части энергии, то скорость вылетевшего электрона будет максимальна, поэтому в уравнение Эйнштейна входит именно $\frac{mV_{\max}^2}{2}$, а не $\frac{mV^2}{2}$. Работа выхода электрона $A_{вых}$ — это работа необходимая для извлечения электрона из вещества. Эта энергия связи — табличная величина, своя для каждого вещества. Работа выхода связана тем, что электрон, вылетая из металла, притягивается к своему изображению.

Из формулы Эйнштейна $h\nu = A_{вых} + \dfrac{mV_{\max}^2}{2}$ следует, что $h\nu \ge A_{вых}$, и минимальная частота света, который выбивает электроны:

$$h\nu_{\min} = A_{вых} \qquad => \qquad \nu_{\min} = \frac{A_{вых}}{h}$$

$$\lambda\nu = c \qquad => \qquad \lambda_{\max}\nu_{\min} = c \qquad => \qquad \lambda_{\max} = \frac{c}{\nu_{\min}} = \frac{ch}{A_{вых}} \qquad =>$$

$\lambda_{\max} = \dfrac{ch}{A_{вых}}$ — красная граница фотоэффекта.

Фотоэффект является наиболее убедительным подтверждением квантовой природы света.

Экзамен. Эффект Кòмптона.

При рассеянии рентгеновского излучения на атомах твердой мишени появляется рассеянное излучение, которое имеет другую длину волны. Эффект Кòмптона состоит в том, что изменение длины волны зависит только от угла рассеяния и больше ни от чего, ни от вещества на котором происходит рассеяние, ни от длины волны рентгеновского излучения.

Это условие особенно хорошо выполняется при рассеянии рентгеновских лучей на веществах с небольшим атомным номером. У легких элементов мал заряд атомного ядра, поэтому мала энергия связи любого электрона с ядром. Энергия связи мала по сравнению с энергией фотона, поэтому можно считать, что фотон рассеивается на свободном электроне.

Рассмотрим задачу рассеяния рентгеновского фотона на свободном электроне на основе законов сохранения энергии и импульса.

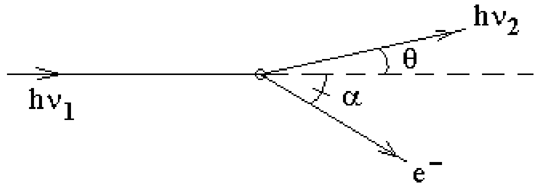
Для любой релятивистской частицы справедливо следующее соотношение между энергией и импульсом: $\left(\dfrac{E}{c}\right)^2 - p^2 = \left(m_0c\right)^2$, где m_0 — масса покоя частицы. Для фотона масса покоя равна нулю $m_0 = 0$, поэтому $p = \dfrac{E}{c}$. Следовательно

$$\begin{cases} E = h\nu \\ p = \dfrac{h\nu}{c} \end{cases}$$ — энергия и импульс фотона.

Для электрона можно воспользоваться выражениями для кинетической энергии и импульса в нерелятивистской форме, так как рассматриваемые энергии (в частности энергия рентгеновского фотона $h\nu$) гораздо меньше энергии покоя электрона m_ec^2.

В отличие от дифракции рентгеновских лучей в данном случае будем считать, что рентгеновский фотон рассеивается не всем веществом, а отдельным свободным электроном.

Рассмотрим диаграмму процесса рассеяния:



.

Напишем уравнения сохранения для энергии и для двух проекций импульса:

$$\begin{cases} h\nu_1 = h\nu_2 + \dfrac{m_e V^2}{2} \\ \dfrac{h\nu_1}{c} = \dfrac{h\nu_2}{c} \cdot \cos(\theta) + m_e V \cdot \cos(\alpha). \\ 0 = \dfrac{h\nu_2}{c} \cdot \sin(\theta) - m_e V \cdot \sin(\alpha) \end{cases}$$

Это три уравнения для трех неизвестных: ν_2, V, α. Заметим, что угол θ мы будем рассматривать не как неизвестную величину, а как переменный параметр задачи. Дело в том, что при одинаковых начальных условиях рентгеновский квант может рассеиваться и рассеивается в разных направлениях θ.

Преобразуем уравнения 2 и 3 к следующему виду:

$$\begin{cases} m_e V \cdot \cos(\alpha) = \dfrac{h}{c} \cdot \left(\nu_1 - \nu_2 \cdot \cos(\theta)\right) \\ m_e V \cdot \sin(\alpha) = \dfrac{h}{c} \cdot \nu_2 \cdot \sin(\theta) \end{cases}.$$

Исключим угол α из этих уравнений. Для этого возведем уравнения в квадрат и сложим их. В результате получим

$$m_e^2 V^2 = \frac{h^2}{c^2} \cdot \left(\nu_1^2 - 2\nu_1\nu_2 \cdot \cos(\theta) + \nu_2^2 \cdot \cos^2(\theta) + \nu_2^2 \cdot \sin^2(\theta)\right).$$

С учетом $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ получим

$$m_e^2 V^2 = \frac{h^2}{c^2} \cdot \left(\nu_1^2 - 2\nu_1\nu_2 \cdot \cos(\theta) + \nu_2^2\right).$$

Добавим и вычтем $2\nu_1\nu_2$ и получим

$$m_e^2 V^2 = \frac{h^2}{c^2} \cdot \left(\nu_1^2 - 2\nu_1\nu_2 \cdot \cos(\theta) + \nu_2^2 - 2\nu_1\nu_2 + 2\nu_1\nu_2\right) \qquad =>$$

$$m_e^2 V^2 = \frac{h^2}{c^2} \cdot \left(\nu_1^2 - 2\nu_1\nu_2 + \nu_2^2 + 2\nu_1\nu_2 - 2\nu_1\nu_2 \cdot \cos(\theta)\right) \qquad =>$$

$$m_e V^2 = \frac{h^2}{m_e c^2} \cdot \left(\left(\nu_1 - \nu_2\right)^2 + 2\nu_1 \nu_2 \cdot \left(1 - \cos(\theta)\right) \right).$$

Левую часть равенства можно выразить иначе из уравнения

$$h\nu_1 = h\nu_2 + \frac{m_e V^2}{2} \qquad =>$$

$$m_e V^2 = 2h\left(\nu_1 - \nu_2\right).$$

Приравняем оба полученных выражения для $m_e V^2$ и получим

$$2h\left(\nu_1 - \nu_2\right) = \frac{h^2}{m_e c^2} \cdot \left(\left(\nu_1 - \nu_2\right)^2 + 2\nu_1 \nu_2 \cdot \left(1 - \cos(\theta)\right) \right).$$

На этом задача фактически решена, так как для каждого значения угла θ получено свое значение частоты рассеянного света ν_2.

Преобразуем результат к более традиционной форме с учетом неравенства $h\nu << m_e c^2$ энергия фотона много меньше энергии покоя электрона. Тогда

$$\frac{h\left(\nu_1 - \nu_2\right)}{m_e c^2} << 2 \qquad => \qquad \frac{h^2\left(\nu_1 - \nu_2\right)^2}{m_e c^2} << 2h\left(\nu_1 - \nu_2\right).$$

Учтем последнее неравенство, чтобы пренебречь первым слагаемым в правой части уравнения $2h\left(\nu_1 - \nu_2\right) = \frac{h^2}{m_e c^2} \cdot \left(\left(\nu_1 - \nu_2\right)^2 + 2\nu_1 \nu_2 \cdot \left(1 - \cos(\theta)\right) \right)$ и отбросить его. Тогда получим

$$2h\left(\nu_1 - \nu_2\right) = \frac{2h^2 \nu_1 \nu_2 \left(1 - \cos(\theta)\right)}{m_e c^2}.$$

Разделим это равенство на произведение $2h\nu_1\nu_2$ и получим

$$\frac{1}{\nu_2} - \frac{1}{\nu_1} = \frac{h}{m_e c^2}\left(1 - \cos(\theta)\right).$$

Умножим это уравнение на c и получим

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{m_e c}\left(1 - \cos(\theta)\right) \qquad =>$$

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{2h}{m_e c} \cdot \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

Здесь $\lambda_2 - \lambda_1$ — изменение длины волны рентгеновского света при неупругом рассеянии, m_e — масса покоя электрона, θ — угол рассеяния рентгеновского излучения.