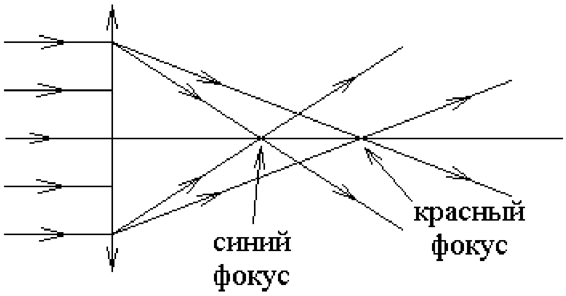
Экзамен. Аберрация. Хроматическая и сферическая аберрация, астигматизм, дисторсия, кома.

Термин аберрация происходит от латинского слова aberratio — уклонение. В применении к оптике аберрация — это искажение изображения.

1). Хроматическая аберрация связана с зависимостью показателя преломления от длины волны $n(\lambda)$. Оптическая сила тонкой линзы Φ связана с ее показателем преломления $n(\lambda)$ соотношением $\Phi = \frac{1}{f} = (n-1)\cdot\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$. Следовательно, оптическая сила линзы Φ и ее фокусное расстояние f тоже зависят от длины волны света λ. Эта зависимость проявляется в том, что параллельный пучок лучей белого света собирается в фокусе линзы на разных расстояниях для света разного цвета.



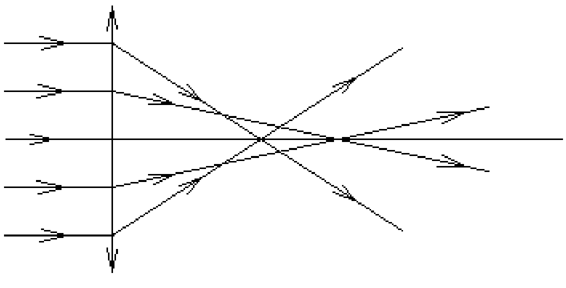
Факультативная вставка.

Есть оптические стекла, дисперсия которых мала. Такое стекло называется крон. Чтобы уменьшить хроматическую аберрацию линзы ее изготавливают из крона. Противоположными свойствами обладает оптическое стекло с большой дисперсией. Такое стекло называется флинт. Флинт используется для изготовления призмы призменного спектрометра.

Дополнительно уменьшить хроматическую аберрацию собирающей линзы из крона можно, если к ней приклеить (или за ней поставить) слабую рассеивающую линзу из флинта.

Конец факультативной вставки.

2). Сферическая аберрация. Участки линзы больше удаленные от оптической оси обладают большей оптической силой и имеют меньшее фокусное расстояние.



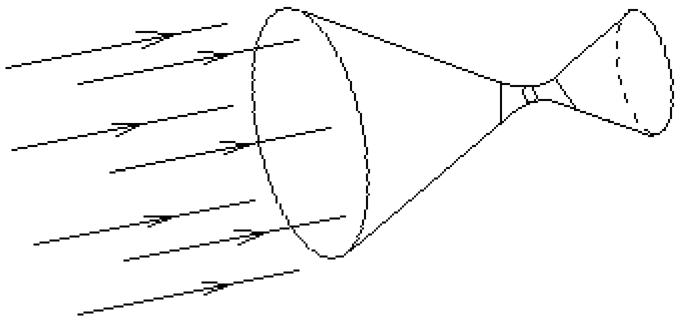
Сферическая аберрация тем слабее, чем меньше отношение радиуса линзы к радиусам кривизны сферических поверхностей линзы.

3). Астигматизм.

Стеклянный шар можно рассматривать, как толстую линзу. Стеклянный цилиндр можно рассматривать, как толстую сильно астигматичную линзу. Направим свет перпендикулярно оси цилиндра. Проходя через цилиндр, свет будет собираться в плоскости перпендикулярной оси цилиндра, но не будет собираться в плоскости, проходящей через ось цилиндра.

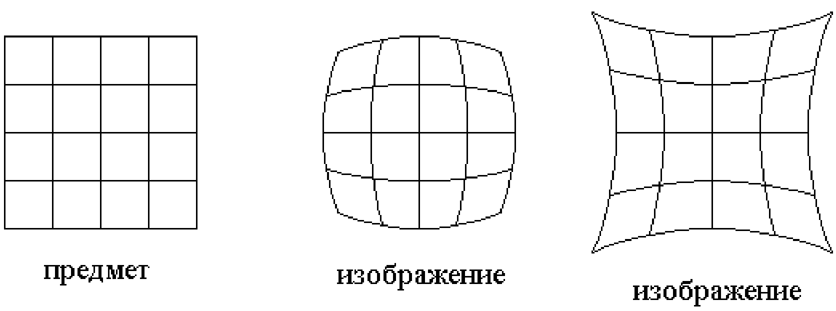
Астигматичная линза по-разному собирает свет в двух ортогональных плоскостях, проходящих через оптическую ось системы. В этих двух плоскостях астигматичная линза имеет разные оптические силы и соответственно разные фокусные расстояния.

Астигматизм проявляется в том, что пучок лучей, идущий параллельно оптической оси собирается не в одной точке в фокусе. Свет собирается сначала, например, в вертикальный отрезок, а затем в горизонтальный отрезок, как я это пытался изобразить на рисунке.



Если линзу повернуть вокруг оптической оси на 90^0, то свет наоборот сначала соберется в горизонтальный отрезок, а затем в вертикальный.

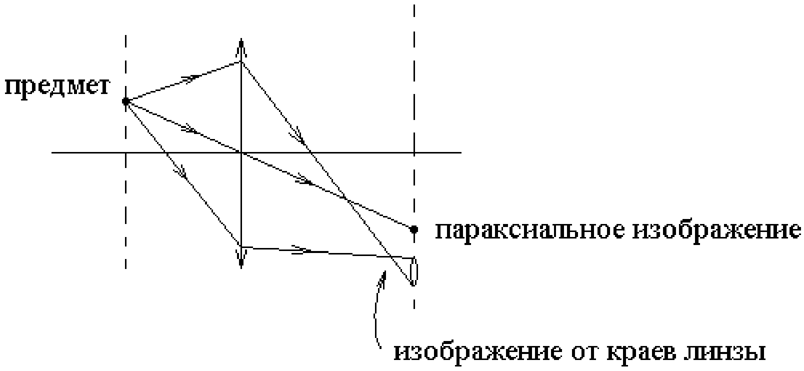
4). Дисторсия или бочка — такое искажение изображения, при котором предмет в виде сетки имеет изображение в виде бочки. Подразумевается, что предмет и его изображение расположены в плоскости перпендикулярной оптической оси.



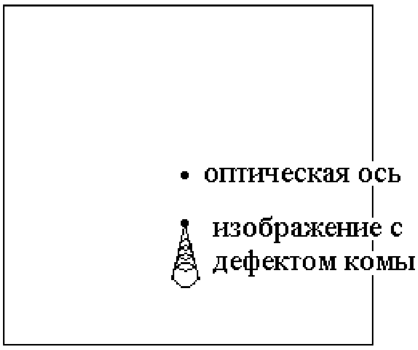
Дисторсия — это разное увеличение на оптической оси и на периферии изображения.

5). Кома (в переводе с греческого — хвост) проявляется только для внеосевых пуков света.

Обычно кома присутствует в сочетании со сферической аберрацией. В результате луч, проходящий через центр линзы, дает изображение в одной точке, а лучи проходящие через края линзы дают смещенное от оптической оси изображение в виде кольца.

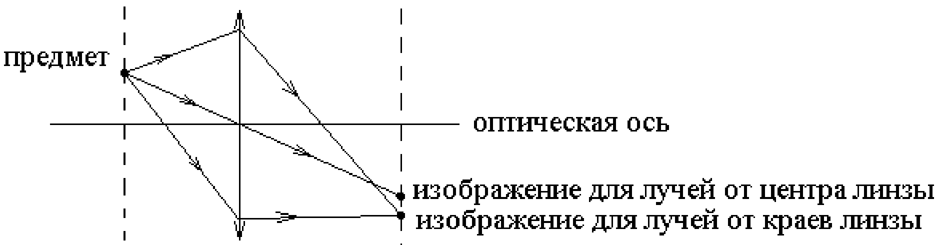


Если линзу мысленно разбить на кольца, то лучи, проходящие через разные кольца линзы, дают разные кольца изображений, которые вместе создают изображение в виде воланчика или кометы.



Название аберрации кома связано с тем, что изображение точечного предмета похоже на комету с пушистым хвостом.

Если рассмотреть аберрацию кома без сферической аберрации, то кома сводится к тому, что луч, проходящий через центр линзы, дает изображение в одной точке, а лучи проходящие через края линзы дают изображение, смещенное от оптической оси, как это показано на рисунке ниже.



В этом случае изображение точечного предмета имеет форму вертикального отрезка.

Факультативная вставка.

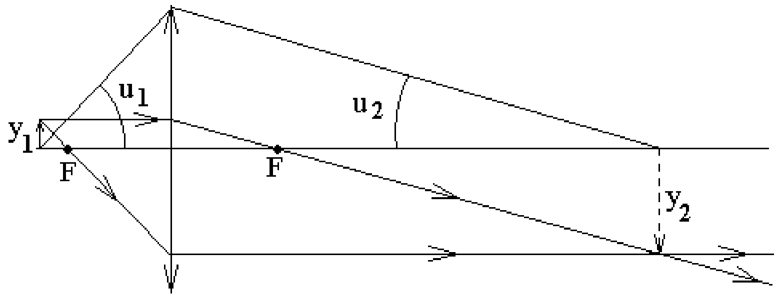
При выполнении так называемого условия синусов Аббе две крайние точки изображения, приведенные на рисунке выше, сольются в одну точку.

Можно сказать, что аберрация кома при соблюдении условия синусов пропадает.

Условие синусов имеет следующий вид:

$$n_1 y_1 \sin(u_1) = n_2 y_2 \sin(u_2),$$

где углы u_1 и u_2 не обязательно малы. Условие выполняется для любого малого отрезка y_1 и его изображения y_2.



При заданной линзе условие синусов может быть выполнено только для двух положений предмета вдоль оптической оси. Второе положение получается из первого, если поменять местами расстояния от линзы до предмета и от линзы до изображения. Условие синусов устраняет аберрацию кома.

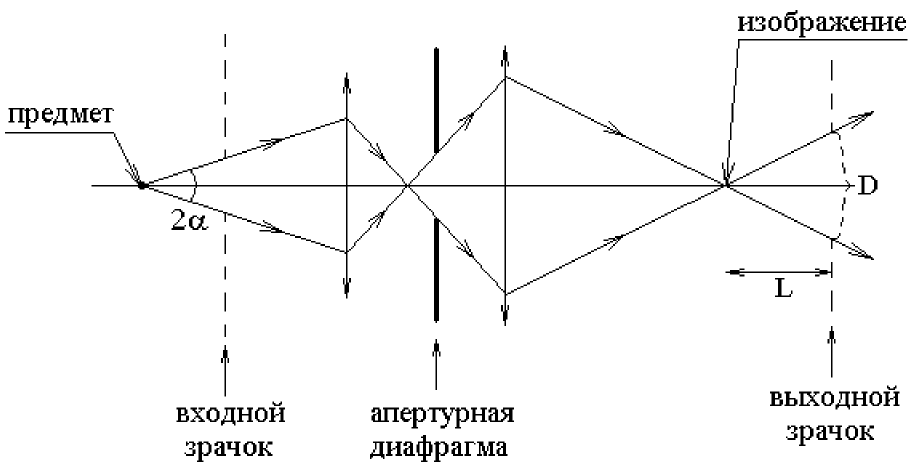
<u>Конец факультативной вставки.</u>

Факультативно. Апертурная диафрагма. Входной и выходной зрачок. Апертура. Относительное отверстие.

Эти понятия применимы к оптической системе, состоящей из одной или нескольких линз.

Рассмотрим точечный источник света, расположенный на оптической оси, и его изображение. Лучи, проходящие через линзы оптической системы, диафрагмируются размерами линз или специально установленными диафрагмами.

Диафрагма или линза, которая сильнее всего диафрагмирует пучок лучей, называется апертурной диафрагмой.



Изображение апертурной диафрагмы в той части оптической системы, которая расположена перед этой диафрагмой, называется входным зрачком оптической системы. В изображение попадают те, и только те лучи, выходящие из точечного источника, которые направлены в область входного зрачка системы.

Если перед апертурной диафрагмой нет линз, то входной зрачок оптической системы совпадает с самой апертурной диафрагмой.

Выходной зрачок системы — это изображение апертурной диафрагмы в той части оптической схемы, которая расположена за апертурной диафрагмой. Если линз за апертурной диафрагмой нет, то апертурная диафрагма совпадает с выходным зрачком системы.

Апертура 2α — это угловой диаметр входного зрачка при наблюдении его из точки расположения предмета.

Относительное отверстие $\frac{D}{L}$ — это отношение диаметра выходного зрачка D к расстоянию от выходного зрачка до точки изображения предмета L.

В старых фотоаппаратах диаметр диафрагмы можно регулировать вручную. При этом числовое значение диафрагмы равно величине обратной к относительному отверстию.

<u>Экзамен. Распространение света в неоднородной среде. Эйконал. Уравнение эйконала.</u>

Эйконал — от греческого слова eikon — изображение (сравните со словом икона).

Будем называть оптической длиной произведение nl, где l — геометрическая длина, n — показатель преломления среды.

Дадим сначала предварительное определение справедливое для частного случая, а затем его расширим. Эйконал — это оптическая длина пути вдоль луча света.

Пусть L — эйконал, тогда $dL \equiv n\,dl$, если отрезок dl направлен вдоль луча. Здесь рассматривается малый отрезок *dl*, так как показатель преломления среды *n* может изменяться от точки к точке.

Тогда

$\frac{\partial L}{\partial l} = n$, где $\frac{\partial}{\partial l}$ — производная вдоль луча.

Покажем, что оптическая длина пути пропорциональна разности фаз световых волн в начале и в конце пути. И действительно, рассмотрим разность фаз $\Delta\varphi$ световых волн в начале и в конце пути некоторого луча. Разность фаз $\Delta\varphi$ можно выразить через время распространения луча Δt. Пока фаза в течение времени Δt распространяется от первой точки до второй, фаза в первой точке изменится на $\omega\Delta t$. Следовательно, разность фаз в последний момент времени в этих двух точках равна:

$$\Delta\varphi = \omega\,\Delta t = \omega\frac{\Delta l}{V_\phi} = \omega\frac{\Delta l}{\frac{c}{n}} = \frac{\omega}{c}\,n\,\Delta l = k_0\,n\,\Delta l = k_0\,\Delta L, \quad \text{где} \quad k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{\omega}{c} \quad \text{—}$$

волновое число, если свет этой частоты будет распространяться в вакууме.

При переходе из среды в среду частота света сохраняется, а длина волны и волновое число изменяются.

$\Delta\varphi = k_0\,\Delta L$ — разность фаз $\Delta\varphi$ в начале и в конце пути пропорциональна оптической длине пути ΔL.

В соответствии с этим результатом дадим второе более общее (и правильное) определение эйконала:

$L \equiv \dfrac{\varphi}{k_0}$, где k_0 — волновое число в вакууме, φ — начальная фаза световой волны или фаза в нулевой момент времени. Начальная фаза $\varphi(\vec{r})$ в каждой точке пространства своя, тогда во втором определении эйконала окажется, что эйконал $L(\vec{r})$ определен в каждой точке пространства $\vec{r}$ волны с широким фронтом, а не только на одной кривой вдоль луча, как в первом (предварительном) определении эйконала.

В малом объеме можно считать, что показатель преломления почти постоянный $n \approx const$, то есть среда почти однородная, а световая волна почти плоская, если радиус кривизны фронта волны гораздо больше размеров рассматриваемого объема. Для плоской волны в однородной среде направление луча перпендикулярно поверхности равных фаз, то есть перпендикулярно поверхности, на которой постоянен эйконал $L = const$, так как эйконал пропорционален фазе $L \equiv \dfrac{\varphi}{k_0}$.

Градиент любого скалярного поля перпендикулярен поверхности постоянного значения этого поля. Тогда градиент эйконала $\vec{\nabla}L$ перпендикулярен поверхности $L = const$, а с учетом того, что направление луча перпендикулярно поверхности $L = const$, получим, что градиент эйконала $\vec{\nabla}L$ направлен вдоль луча.

Проекция градиента скалярного поля на любое направление равна производной от скалярного поля по этому направлению. Тогда для любого скалярного поля модуль градиента равен производной от поля по направлению градиента:

$\left|\vec{\nabla}L\right| = \dfrac{\partial L}{\partial l}$, где $\dfrac{\partial}{\partial l}$ — производная вдоль луча, а с учетом того, что $\dfrac{\partial L}{\partial l} = n$, получаем

$\left|\vec{\nabla}L\right| = n \qquad =>$

$\vec{\nabla} L = n\vec{e}_s$, где $\vec{e}_s \equiv \dfrac{\vec{S}}{\left|\vec{S}\right|}$ — единичный вектор вдоль луча, где $\vec{S}$ — вектор Пойнтинга, который направлен вдоль луча по самому смыслу луча.

$\vec{\nabla} L = n\vec{e}_s$ — уравнение эйконала. =>

$\left(\vec{\nabla} L\right)^2 = n^2$ — это уравнение тоже называют уравнением эйконала.

Факультативно. Эйконал по Бутикову.

В книге Е. И. Бутикова "Оптика" и в монографии М. Борна и Э. Вольфа "Основы оптики" определением эйконала L является выражение для напряженности светового поля:

$$\tilde{\vec{E}}\left(t,\vec{r}\right) = E_0\left(\vec{r}\right)\cdot \tilde{\vec{e}}_p\left(\vec{r}\right)\cdot e^{i\left(k_0 L\left(\vec{r}\right)-\omega t+\varphi_0\right)}$$

Это определение отличается от нашего второго определения эйконала несущественной константой φ_0.

Экзамен. Уравнение для вычисления траектории луча в неоднородной среде.

Возьмем градиент от уравнения $\dfrac{\partial L}{\partial l} = n$ и получим

$$\vec{\nabla} n = \vec{\nabla}\frac{\partial L}{\partial l} = \frac{\partial}{\partial l}\vec{\nabla} L = \frac{\partial}{\partial l}\left(n\vec{e}_s\right) \quad =>$$

$$\vec{\nabla} n = \frac{\partial}{\partial l}\left(n\vec{e}_s\right) \qquad (11.1)$$

Это уравнение понадобится нам при рассмотрении еще и следующего экзаменационного вопроса, а сейчас разложим производную от произведения и получим

$$\vec{\nabla} n = \frac{\partial}{\partial l}\left(n\vec{e}_s\right) = \vec{e}_s\frac{\partial n}{\partial l} + n\frac{\partial \vec{e}_s}{\partial l}$$

откуда выразим $\dfrac{\partial \vec{e}_s}{\partial l}$ и получим уравнение, позволяющее вычислять траекторию луча в неоднородной среде:

$$\frac{\partial \vec{e}_s}{\partial l} = \frac{1}{n}\vec{\nabla} n - \frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial l}\vec{e}_s.$$

И действительно, перепишем это уравнение в виде

$$d\vec{e}_s = \left(\frac{1}{n}\vec{\nabla} n - \frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial l}\vec{e}_s\right)dl \qquad (11.2).$$

Это уравнение позволяет найти изменение направления луча $d\vec{e}_s$ при небольшом перемещении dl вдоль луча. Если в исходной точке пространства $\vec{r}$ задано направление луча $\vec{e}_s$ и в каждой точке среды известен показатель преломления $n\left(\vec{r}\right)$, то в исходной точке пространства можно вычислить выражение в скобках в правой части уравнения (11.2). Тогда уравнение (11.2) позволяет найти изменение вектора $\vec{e}_s$ и новое направление луча в соседней точке вдоль луча на расстоянии dl от исходной точки. Затем новую точку и новое направление луча можно рассматривать, как исходные, и повторить процедуру.

Уравнение (11.2) показывает, в каком направлении поворачивает луч в неоднородной среде. Формула для изменения единичного вектора вдоль луча содержит два слагаемых. Второе слагаемое направлено вдоль луча $\vec{e}_s$ и не изменяет его направления. Первое слагаемое $\frac{1}{n}\vec{\nabla}n\,dl$ направлено, как и градиент показателя преломления $\vec{\nabla}n$. Градиент направлен в сторону увеличения показателя преломления.

Следовательно, луч поворачивает в оптически более плотную среду, в среду с большим показателем преломления.

<u>Экзамен. Распространение света в среде, где показатель преломления зависит только от вертикальной координаты.</u>

Направим ось z вертикально вверх в направлении, в котором изменяется показатель преломления среды.

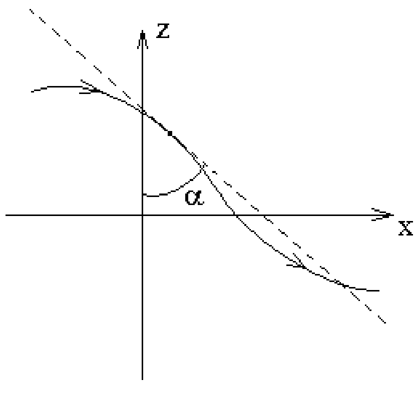
Закон Снеллиуса $n_1 \cdot \sin(\alpha_1) = n_2 \cdot \sin(\alpha_2)$ естественно обобщить на этот случай в виде уравнения $n \cdot \sin(\alpha) = const$, где α — угол между вертикалью и лучом.

Докажем справедливость этого предположения.

В предыдущем вопросе мы получили формулу (11.1):

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(n\vec{e}_s\right) = \vec{\nabla}n\,.$$

Мы рассматриваем случай зависимости показателя преломления только от вертикальной координаты, тогда $\vec{\nabla}n \parallel \vec{e}_z$. Напомним, что здесь $\frac{\partial}{\partial l}$ — производная вдоль реального луча, а не вдоль любого направления.



Рассмотрим цепочку равенств:

$$\left(\vec{e}_x,\vec{e}_z\right)=0 \quad => \quad \left(\vec{e}_x,\vec{\nabla}n\right)=0 \quad => \quad \left(\vec{e}_x,\vec{\nabla}\frac{\partial L}{\partial l}\right)=0 \quad =>$$

$$\left(\vec{e}_x,\frac{\partial}{\partial l}\vec{\nabla}L\right)=0 \quad => \quad \left(\vec{e}_x,\frac{\partial}{\partial l}\left(n\vec{e}_s\right)\right)=0 \quad => \quad \frac{\partial}{\partial l}\left(n\left(\vec{e}_x,\vec{e}_s\right)\right)=0$$

$$=> \quad \frac{\partial}{\partial l}\left(n\cdot\cos\left(\vec{e}_x,\vec{e}_s\right)\right)=0 \quad => \quad \frac{\partial}{\partial l}\left(n\cdot\sin\left(\vec{e}_z,\vec{e}_s\right)\right)=0 \quad =>$$

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(n\cdot\sin\left(\alpha\right)\right)=0 \quad =>$$

$$n\cdot\sin\left(\alpha\right)=const.$$

Величина $n\cdot\sin\left(\alpha\right)$ сохраняется при перемещении вдоль луча, где α — угол между лучом и вертикалью, если показатель преломления зависит только от вертикальной координаты.

Факультативная вставка.

Рассмотрим предельно малый объем. В этом объеме можно считать, что градиент показателя преломления $\vec{\nabla}n$ почти постоянен. Можно заменить в этом малом объеме реальную зависимость $\vec{\nabla}n$ от $\vec{r}$ на среднее значение градиента. Тогда в этом малом объеме луч будет поворачивать так, чтобы величина $n\cdot\sin\left(\alpha\right)$ сохранялась, здесь α — угол между лучом и градиентом показателя преломления. То есть, из равенства $n\cdot\sin\left(\alpha\right)=const$ можно найти, как луч поворачивает в произвольной среде $d\vec{e}_s=\left(\frac{1}{n}\vec{\nabla}n-\frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial l}\vec{e}_s\right)dl$.

Конец факультативной вставки.

Экзамен. Принцип Ферма.

Принцип Ферма утверждает, что свет распространяется по пути, который занимает минимум времени.

Минимальное время распространения от точки I до точки II означает, что

$$\int_I^{II} dt=\min.$$

$$dt=\frac{dl}{V_ф}=\frac{dl}{\frac{c}{n}}=\frac{1}{c}n\,dl \quad =>$$

$$\int_I^{II}\frac{1}{c}n\,dl=\min \quad <=> \quad \int_I^{II}n\,dl=\min.$$

Докажем это равенство, то есть докажем, что оптическая длина между точками I и II вдоль реального луча меньше, чем вдоль любой другой мысленной кривой, соединяющей точки I и II.

Обозначим: $d\vec{l}$ — перемещение вдоль реального луча, $d\vec{l}\,'$ — перемещение вдоль любой мыслимой кривой.

Тогда достаточно доказать, что $\int\limits_I^{II} n\,dl \le \int\limits_I^{II} n\,dl'$. В дальнейших формулах нужно внимательно следить за тем, где стоит dl, а где — dl'.

$1 \ge \cos\left(d\vec{l}, d\vec{l}\,'\right) \quad =>$

$\int\limits_I^{II} n\,dl' \ge \int\limits_I^{II} n \cdot \cos\left(d\vec{l}, d\vec{l}\,'\right) dl'$, где оба интеграла взяты вдоль любой мыслимой кривой.

В правой части неравенства заменим n на $\frac{\partial L}{\partial l}$ согласно нашему первому определению эйконала L, где $\frac{\partial}{\partial l}$ — производная вдоль реального луча. Тогда

$$\int\limits_I^{II} n\,dl' \ge \int\limits_I^{II} \frac{\partial L}{\partial l} \cos\left(d\vec{l}, d\vec{l}\,'\right) dl' = \int\limits_I^{II} \left|\vec{\nabla} L\right| \cos\left(d\vec{l}, d\vec{l}\,'\right) dl'.$$

Учтем, что градиент эйконала направлен вдоль луча, что следует из уравнения эйконала в форме $\vec{\nabla} L = n\vec{e}_s$. Откуда

$$d\vec{l} \uparrow\uparrow \vec{\nabla} L \quad => \quad \cos\left(d\vec{l}, d\vec{l}\,'\right) = \cos\left(\vec{\nabla} L, d\vec{l}\,'\right) \quad =>$$

$$\int\limits_I^{II} n\,dl' \ge \int\limits_I^{II} \left|\vec{\nabla} L\right| \cos\left(\vec{\nabla} L, d\vec{l}\,'\right) dl' = \int\limits_I^{II} \left(\vec{\nabla} L\right)_{d\vec{l}\,'} dl' = \int\limits_I^{II} \frac{\partial L}{\partial l'} dl' = \int\limits_I^{II} dL =$$
$$= L(II) - L(I).$$

Перейдем теперь в правой части неравенства от интеграла вдоль любой мыслимой кривой к интегралу вдоль реального луча.

$$\int\limits_I^{II} n\,dl' \ge L(II) - L(I) = \int\limits_I^{II} \frac{\partial L}{\partial l} dl = \int\limits_I^{II} n\,dl \quad =>$$

$$\int\limits_I^{II} n\,dl' \ge \int\limits_I^{II} n\,dl.$$

Что и требовалось доказать.

Факультативная вставка.

Принцип Ферма выполняется не строго. Так, например, в гауссовом пучке лучей даже в пустоте лучи распространяются не по кратчайшим прямым линиям, а по гиперболам с радиусом кривизны *R*, таким что $\frac{R}{\lambda} \approx \left(\frac{D}{\lambda}\right)^3$, где D — диаметр пучка лучей, λ — длина волны света. Сильнее всего лучи искривляются в шейке каустики, где пучок лучей имеет наименьший диаметр.

Где же допущена нестрогость в выводе принципа Ферма? Дело в том, что равенство $V_ф = \frac{c}{n}$ строго выполняется только для волны с одинаковой амплитудой в разных точках фронта, поэтому $dt = \frac{dl}{V_ф} \neq \frac{dl}{\frac{c}{n}} = \frac{1}{c} n\,dl$. Например, раньше мы рассматривали гауссов пучок лучей в пустоте, и фазовая скорость в этом пучке $V_ф > c$.

Лучше выполняется принцип Ферма, если точкой I является точечный источник, но и здесь есть подвох. Если свет отражается от зеркала, то через произвольную точку пространства свет проходит не в одном, а в двух направлениях. В этом случае путь для света, который поворачивает, не доходя до зеркала, оказывается короче, чем путь с отражением от зеркала. Кроме того при отражении от зеркала свет может пойти путем, который имеет максимальную оптическую длину вместо минимальной длины.

Конец факультативной вставки.