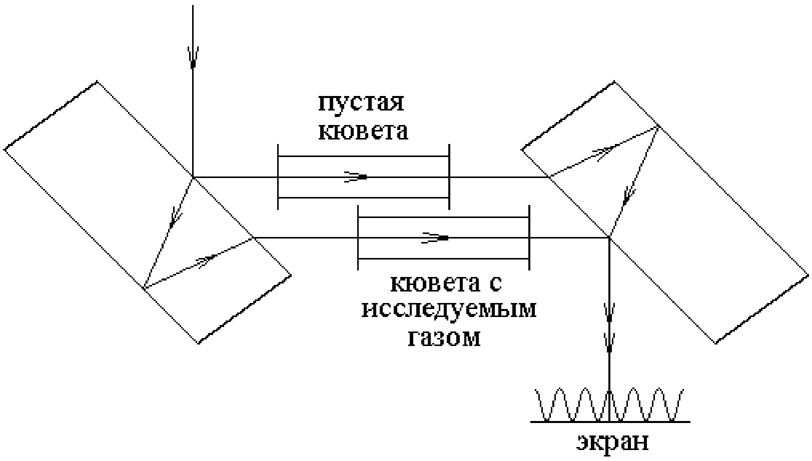
Экзамен. Интерферометр Жамена.

Оптическая схема интерферометра Жамена приведена на нижеследующем рисунке.



Интерферометр Жамена, как и другие интерферометры, обычно используют для получения зависимости показателя преломления исследуемого газа от его давления и от длины волны света.

Пусть в каждом из двух интерферирующих лучей установлена одна из двух одинаковых кювет.

Если интерферометр Жамена освещать параллельным пучком лучей, то при идеальных плоскопараллельных пластинках весь экран будет засвечен равномерно. Если хотя бы одна из пластинок не совсем плоскопараллельна, то образуется оптический клин, и интерферирующие волны приходят на экран под небольшим углом друг к другу. Оптический клин приводит к появлению на экране интерференционных полос.

Эксперимент по измерению показателя преломления газа состоит в следующем. Сначала обе кюветы откачивают, затем в одну из кювет, например нижнюю, постепенно напускают исследуемый газ. В процессе изменения давления газа изменяется его показатель преломления и оптическая длина нижней кюветы.

Пока изменяется давление газа интерференционные полосы бегут по экрану. Нужно сосчитать, сколько интерференционных полос проходит через фиксированную точку экрана. Пусть число полос равно m, тогда оптическая длина кюветы изменяется на величину $\Delta = m\lambda$. Это с одной стороны, а с другой стороны, изменение оптической длины кюветы равно $nl - l$, где l — геометрическая длина кюветы. Тогда из равенства

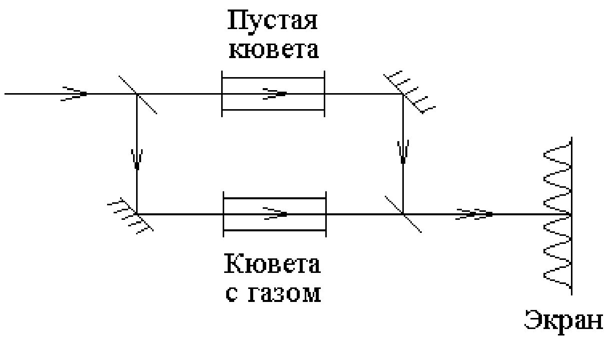
$$m\lambda = l(n-1)$$

можно экспериментально определить величину показателя преломления n.

Представляет интерес, как зависимость показателя преломления от длины волны света $n(\lambda)$ или дисперсия света, так и зависимость показателя преломления от давления или концентрации N исследуемого газа для проверки формулы Лоренц-Лорентца $\frac{n^2-1}{n^2+2}=\frac{4}{3}\pi N\alpha$ или $\frac{n^2-1}{n^2+2}\sim N$, здесь α — поляризуемость молекулы или коэффициент пропорциональности между дипольным моментом молекулы и напряженностью светового поля $\vec{p}=\alpha\vec{E}$.

<u>Экзамен. Интерферометр Рождественского (Маха — Цендера).</u>

Оптическая схема интерферометра представлена на нижеследующем рисунке:



.

Преимущество этой схемы по сравнению с интерферометром Жамена в том, что здесь легко разместить широкие кюветы. Недостаток схемы — более сложная юстировка.

<u>Факультативная вставка.</u>

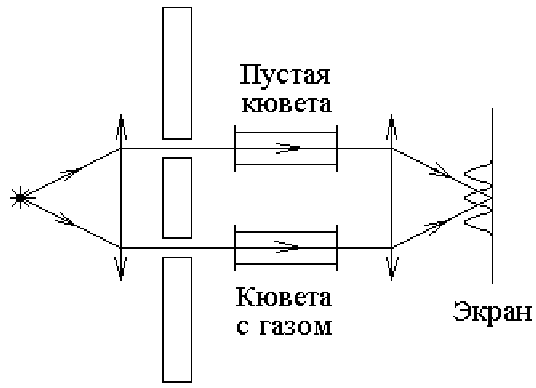
При наблюдении интерференции от нелазерного источника света перед интерферометром и после него устанавливают по одной линзе.

Пусть излучающая поверхность отображается первой линзой внутри интерферометра в каждое из двух плеч интерферометра в виде двух плоскостей изображения. В этой плоскости изображения одного из плеч интерферометра можно поместить исследуемый прозрачный объект, например пламя свечи. Экран после второй линзы (за интерферометром) устанавливают так, чтобы на экране наблюдались полосы равной толщины от двух поверхностей изображения источника света в первой линзе. На экране наблюдают полосы равной оптической толщины, которые отображают оптическую плотность пламени свечи в разных точках свечи. Такую оптическую схему называют интерферометром Маха — Цендера.

<u>Конец факультативной вставки.</u>

<u>Экзамен. Интерферометр Рэлея.</u>

Оптическая схема интерферометра представлена на рисунке:



Дифракция.

Дифракция волн — это огибание волнами препятствий.

Как и интерференцию, будем рассматривать дифракцию в вакууме.

Факультативно. Интегральная теорема Кирхгофа.

Интегральная теорема Кирхгофа позволяет выразить амплитуду светового поля в точке наблюдения через интеграл по любой замкнутой поверхности, охватывающей эту точку наблюдения. В следующем вопросе мы обсудим, как вклады от разных точек охватывающей поверхности можно рассматривать, как излучения вторичных источников света расположенных на этой поверхности.

Рассмотрим волновое уравнение для комплексного светового поля:

$\Delta\tilde{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial t^2} = 0$, где c — фазовая скорость световых волн.

Пусть зависимость поля $\tilde{E}$ от времени монохроматическая

$\tilde{E}(t,\vec{r}) = \tilde{E}_0(\vec{r}) \cdot e^{-i\omega t}$.

Подставим это выражение в волновое уравнение и получим уравнение Гельмгольца для пространственной зависимости комплексной амплитуды $\tilde{E}_0(\vec{r})$ комплексного поля $\tilde{E}(t,\vec{r})$:

$\Delta\tilde{E}_0 + k^2\tilde{E}_0 = 0$, где $k = \frac{\omega}{c}$.

$\tilde{E}_0(\vec{r})$ — комплексная амплитуда разная в разных точках пространства.

Рассмотрим два любых решения уравнения Гельмгольца: $\varphi(\vec{r})$ и $\psi(\vec{r})$. Тогда

$$\begin{cases} \Delta\varphi + k^2\varphi = 0 \\ \Delta\psi + k^2\psi = 0 \end{cases}.$$

Умножим первое уравнение на ψ, второе умножим на φ, и рассмотрим разность двух уравнений:

$$\psi\,\Delta\varphi - \varphi\Delta\psi = 0. \qquad (1)$$

Рассмотрим

$$div\left(\psi\vec{\nabla}\varphi-\varphi\vec{\nabla}\psi\right)=div\left(\psi\vec{\nabla}\varphi\right)-div\left(\varphi\vec{\nabla}\psi\right)=\left(\vec{\nabla},\psi\vec{\nabla}\varphi\right)-\left(\vec{\nabla},\varphi\vec{\nabla}\psi\right).$$

Каждое из двух слагаемых раскроем, как производную от произведения и получим:

$$\left(\vec{\nabla},\psi\vec{\nabla}\varphi\right)-\left(\vec{\nabla},\varphi\vec{\nabla}\psi\right)=\left(\vec{\nabla}\psi,\vec{\nabla}\varphi\right)+\psi\left(\vec{\nabla},\vec{\nabla}\varphi\right)-\left(\vec{\nabla}\varphi,\vec{\nabla}\psi\right)-\varphi\left(\vec{\nabla},\vec{\nabla}\psi\right)=$$
$$=\psi\Delta\varphi-\varphi\Delta\psi=0$$

Последнее равенство нулю следует из равенства (1).

Итак $div\left(\psi\vec{\nabla}\varphi-\varphi\vec{\nabla}\psi\right)=0$ =>

$$0=\int\limits_V div\left(\psi\vec{\nabla}\varphi-\varphi\vec{\nabla}\psi\right)dV=\oint\limits_S\left(\left(\psi\vec{\nabla}\varphi-\varphi\vec{\nabla}\psi\right),d\vec{S}\right), \qquad (2)$$

где последнее равенство — это теорема Гаусса-Остроградского, примененная к векторному полю $\left(\psi\vec{\nabla}\varphi-\varphi\vec{\nabla}\psi\right)$. Далее

$$\oint\limits_S\left(\left(\psi\vec{\nabla}\varphi-\varphi\vec{\nabla}\psi\right),d\vec{S}\right)=\oint\limits_S\left(\psi\left(\vec{\nabla}\varphi,d\vec{S}\right)-\varphi\left(\vec{\nabla}\psi,d\vec{S}\right)\right).$$

Заметим, что

$\left(\vec{\nabla}\varphi,d\vec{S}\right)=\left(\vec{\nabla}\varphi\right)_{d\vec{S}}dS=\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}dS$, где $\vec{n}$ — внешняя нормаль поверхности S. Тогда

$$\oint\limits_S\left(\psi\left(\vec{\nabla}\varphi,d\vec{S}\right)-\varphi\left(\vec{\nabla}\psi,d\vec{S}\right)\right)=\oint\limits_S\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)dS=0.$$

Последнее равенство

$$\oint\limits_S\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)dS=0 \qquad (3)$$

нулю определяется левой частью равенства (2).

Подставим в равенство (3) $\oint\limits_S\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)dS=0$ функции φ и ψ в виде:

$\begin{cases}\varphi=\tilde{E}_0\left(\vec{r}\right)\\ \psi=\dfrac{e^{ikr}}{r}\end{cases}$, где $\tilde{E}_0\left(\vec{r}\right)$ — комплексная амплитуда светового поля.

Чтобы иметь право подставить обе функции в равенство (3) $\oint\limits_S\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)dS=0$ необходимо, чтобы обе функции удовлетворяли уравнению Гельмгольца:

$$\begin{cases} \Delta\varphi + k^2\varphi = 0 \\ \Delta\psi + k^2\psi = 0 \end{cases}.$$

Комплексная амплитуда светового поля $\tilde{E}_0(\vec{r})$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta\tilde{E}_0 + k^2\tilde{E}_0 = 0,$$

так как само световое поле $\tilde{E}(t,\vec{r})$ удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta\tilde{E} - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\tilde{E}}{\partial t^2} = 0$$

и мы хотим рассмотреть монохроматическое световое поле в виде

$$\tilde{E}(t,\vec{r}) = \tilde{E}_0(\vec{r})\cdot e^{-i\omega t}.$$

Покажем теперь, что функция $\psi = \dfrac{e^{ikr}}{r}$ тоже удовлетворяет уравнению Гельмгольца. Функция $\psi = \dfrac{e^{ikr}}{r}$ имеет сферическую симметрию, поэтому проверку удобно проводить в сферической системе координат, где оператор Лапласа имеет следующий вид:

$$\Delta\psi = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}.$$

Функция $\psi = \dfrac{e^{ikr}}{r}$ зависит только от координаты r. В таком случае нужно рассмотреть только производные по r.

$$\Delta\psi = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) \qquad =>$$

$$\Delta\psi = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\right) = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\cdot\left(-\frac{e^{ikr}}{r^2} + ik\frac{e^{ikr}}{r}\right)\right) = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(-e^{ikr} + ikr\cdot e^{ikr}\right) =$$

$$= \frac{1}{r^2}\cdot\left(-ik\cdot e^{ikr} + \left(ik\cdot e^{ikr} - k^2 r\cdot e^{ikr}\right)\right) = -k^2\cdot\frac{e^{ikr}}{r} = -k^2\psi$$

Сравнивая начало и конец цепочки равенств, получим

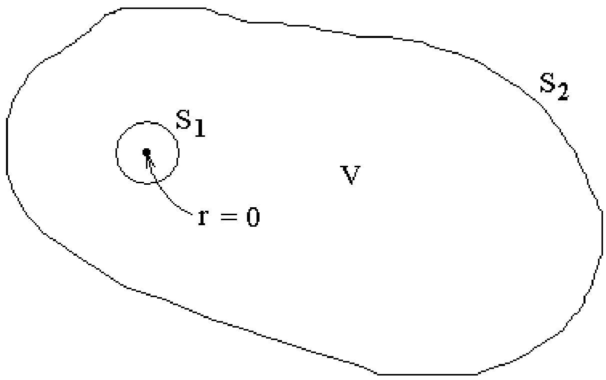
$\Delta\psi + k^2\psi = 0$ — уравнение Гельмгольца для функции ψ.

Подставим $\begin{cases} \varphi = \tilde{E}_0(\vec{r}) \\ \psi = \dfrac{e^{ikr}}{r} \end{cases}$ в равенство (1) $\oint\limits_S\left(\psi\dfrac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\dfrac{\partial\psi}{\partial n}\right)dS = 0$ и получим

$$\oint\limits_S\left(\frac{e^{ikr}}{r}\cdot\frac{\partial\tilde{E}_0(\vec{r})}{\partial n} - \tilde{E}_0(\vec{r})\cdot\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\right)\cdot dS = 0 \qquad (4)$$

Теорема Гаусса-Остроградского, на основе которой были получены равенства (3) и (4), справедлива только в том случае, если подынтегральная функция не имеет особых точек в объеме V, то есть не обращается в бесконечность ни в одной точке объема V. Поэтому из объема, ограниченного поверхностью S нужно исключить точку $r=0$, в которой функция $\psi=\dfrac{e^{ikr}}{r}$ обращается в бесконечность.

Будем считать, что граница S объема V двусвязная и состоит из двух односвязных поверхностей S_1 и S_2.



Здесь S_1 — малая сфера с центром в точке $r=0$.

Если в равенстве (4) $\vec{n}$ — внешняя нормаль объема V, то

$$\oint\limits_{S_1} + \oint\limits_{S_2} = 0.$$

Если же в равенстве (4) $\vec{n}$ — внешняя нормаль поверхностей S_1 и S_2, то

$$-\oint\limits_{S_1} + \oint\limits_{S_2} = 0 \quad => \quad \oint\limits_{S_1} = \oint\limits_{S_2} \quad <=>$$

$$\oint\limits_{S_1}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\cdot\frac{\partial\tilde{E}_0(\vec{r})}{\partial n}-\tilde{E}_0(\vec{r})\cdot\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\right)\cdot dS=\oint\limits_{S_2}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\cdot\frac{\partial\tilde{E}_0(\vec{r})}{\partial n}-\tilde{E}_0(\vec{r})\cdot\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\right)\cdot dS$$

Рассмотрим подробнее $\oint\limits_{S_1}$ — интеграл по малой сфере.

$$\oint\limits_{S_1} = \oint\limits_{S_1}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\cdot\frac{\partial\tilde{E}_0(\vec{r})}{\partial n}-\tilde{E}_0(\vec{r})\cdot\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\right)\cdot dS=$$

$$=\oint\limits_{S_1}\frac{e^{ikr}}{r}\cdot\frac{\partial\tilde{E}_0(\vec{r})}{\partial n}\cdot dS-\oint\limits_{S_1}\tilde{E}_0(\vec{r})\cdot\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\cdot dS\approx$$

$$\approx\frac{e^{ikr}}{r}\cdot\oint\limits_{S_1}\frac{\partial\tilde{E}_0(\vec{r})}{\partial n}\cdot dS-\tilde{E}_0(\vec{r})\cdot\oint\limits_{S_1}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\cdot dS$$

В последнем равенстве из первого интеграла вынесен сомножитель $\frac{e^{ikr}}{r}$, так как он постоянен на поверхности сферы с постоянным радиусом r. Из второго интеграла вынесен сомножитель $\tilde{E}_0(\vec{r})$, так как он почти постоянен для сферы малого радиуса.

Рассмотрим первое слагаемое $\frac{e^{ikr}}{r} \cdot \oint\limits_{S_1} \frac{\partial \tilde{E}_0(\vec{r})}{\partial n} \cdot dS$ в получившемся выражении. Здесь подынтегральное выражение $\frac{\partial \tilde{E}_0(\vec{r})}{\partial n}$ ограничено, так как $\tilde{E}_0(\vec{r})$ не имеет особенности при $r = 0$. Площадь сферы $S_1 = 4\pi r^2 \sim r^2$. Тогда и весь интеграл $\oint\limits_{S_1} \frac{\partial \tilde{E}_0(\vec{r})}{\partial n} \cdot dS$ ограничен слагаемым пропорциональным r^2 с учетом ограниченности подынтегрального выражения. При малых значениях величины r сомножитель перед интегралом $\frac{e^{ikr}}{r}$ примерно пропорционален $\frac{1}{r}$, и все выражение с первым интегралом стремится к нулю:

$$\frac{e^{ikr}}{r} \cdot \oint\limits_{S_1} \frac{\partial \tilde{E}_0(\vec{r})}{\partial n} \cdot dS \sim r \xrightarrow[r \to 0]{} 0.$$

Рассмотрим теперь второе слагаемое в выражении

$\frac{e^{ikr}}{r} \cdot \oint\limits_{S_1} \frac{\partial \tilde{E}_0(\vec{r})}{\partial n} \cdot dS - \tilde{E}_0(\vec{r}) \cdot \oint\limits_{S_1} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) \cdot dS$, а именно:

$$-\tilde{E}_0(\vec{r}) \cdot \oint\limits_{S_1} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) \cdot dS.$$

Здесь сомножитель перед интегралом $\tilde{E}_0(\vec{r}) \approx \tilde{E}_0(0)$ — это амплитуда светового поля в точке $r = 0$, а $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r}$. Тогда

$$-\tilde{E}_0(\vec{r}) \cdot \oint\limits_{S_1} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) \cdot dS = -\tilde{E}_0(0) \oint\limits_{S_1} \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) \cdot dS = -\tilde{E}_0(0) \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) \cdot \oint\limits_{S_1} dS$$

В последнем выражении при малых значениях r получим $\frac{e^{ikr}}{r} \approx \frac{1}{r}$. Тогда $\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) \approx -\frac{1}{r^2}$. Следовательно, два интеграла можно заменить одним вторым интегралом и получить

$$-\tilde{E}_0(\vec{r})\cdot\oint\limits_{S_1}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\cdot dS \approx -\tilde{E}_0(0)\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\cdot\oint\limits_{S_1} dS \approx$$

$$\approx -\tilde{E}_0(0)\cdot\left(-\frac{1}{r^2}\right)\cdot\oint\limits_{S_1} dS = \tilde{E}_0(0)\cdot\frac{1}{r^2}\cdot 4\pi r^2 = 4\pi\tilde{E}_0(0).$$

Тогда из равенства интегралов по двум поверхностям $\oint\limits_{S_1} = \oint\limits_{S_2}$ и равенства первого интеграла величине $4\pi\tilde{E}_0$ получаем:

$$\tilde{E}_0(0) = \frac{1}{4\pi}\cdot\oint\limits_{S_2}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\cdot\frac{\partial\tilde{E}_0(\vec{r})}{\partial n} - \tilde{E}_0(\vec{r})\cdot\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\right)\cdot dS.$$

Здесь $\vec{n}$ — внешняя нормаль поверхности S_2. Заменим ее на внутреннюю нормаль, а появляющийся при этом знак минус компенсируем переменой мест подынтегральных слагаемых. Поскольку в рассмотрении осталась только поверхность S_2 переобозначим $S_2 \to S$ и получим интегральную теорему Кирхгофа в окончательном виде:

$$\tilde{E}_0(0) = \frac{1}{4\pi}\cdot\oint\limits_{S}\left(\tilde{E}_0(\vec{r})\cdot\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) - \frac{e^{ikr}}{r}\cdot\frac{\partial\tilde{E}_0(\vec{r})}{\partial n}\right)\cdot dS, \qquad (3)$$

где $\vec{n}$ — внутренняя нормаль замкнутой поверхности S, и точка $r = 0$ расположена внутри этой замкнутой поверхности.

Экзамен. Скалярная теория дифракции Кирхгофа.

При рассмотрении предыдущего вопроса мы сознательно не писали значка вектора у напряженности электрического поля $\tilde{E}(t,\vec{r})$ и у амплитуды напряженности $\tilde{E}_0(\vec{r})$.

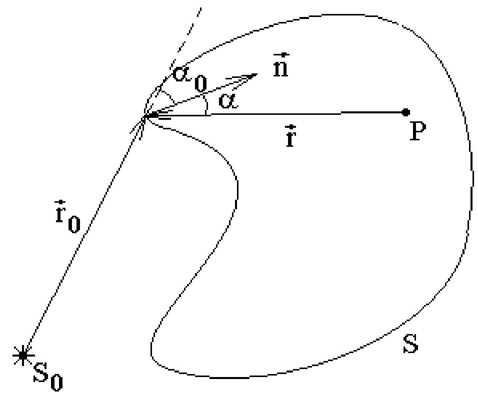
Теория дифракции Кирхгофа называется скалярной, чтобы подчеркнуть ее нестрогость в применении к рассмотрению дифракции светового поля.

В обсуждаемой ниже теории Кирхгофа рассматривают точечный источник света, излучающий сферически симметричные волны с комплексной амплитудой вида:

$$\tilde{E}_0(\vec{r}_0) = A_0\frac{e^{ikr_0}}{r_0},$$

где $\vec{r}_0$ — вектор, проведенный из точечного источника света в точку наблюдения. На самом деле электромагнитные волны поперечны, а поперечные волны не могут быть сферически симметричны. Вместо сферически симметричного поля надо было бы рассматривать поле излучающего диполя.

Итак, пусть источником света является один точечный сферически симметричный источник S_0. Нас будет интересовать световое поле в точке наблюдения P. Точку наблюдения охватывает замкнутая поверхность S такая, что источник света S_0 расположен снаружи поверхности S.



Введем необходимые обозначения:

$\vec{r}$ — радиус-вектор из точки наблюдения P в точку на поверхности S,

$\vec{r}_0$ — радиус-вектор из источника света S_0 в точку на поверхности S,

$\vec{n}$ — внутренняя нормаль поверхности S.

α_0 и α — углы, на которые свет поворачивает от источника к внутренней нормали и от внутренней нормали к точке наблюдения. Другими словами:

$\alpha_0 \equiv \left(\widehat{\vec{n},\vec{r}_0}\right)$ — угол между нормалью к поверхности и вектором, направленным от источника света S_0 в точку на поверхности S.

$\alpha \equiv \left(\widehat{\vec{n},-\vec{r}}\right)$ — угол между нормалью к поверхности и вектором, направленным из точки поверхности S в точку наблюдения P.

В формулу (3) рассмотренной раньше интегральной теоремы Кирхгофа

$$\tilde{E}_0(0) = \frac{1}{4\pi} \cdot \oint_S \left(\tilde{E}_0(\vec{r}) \cdot \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) - \frac{e^{ikr}}{r} \cdot \frac{\partial \tilde{E}_0(\vec{r})}{\partial n} \right) \cdot dS$$

подставим поле точечного сферически симметричного источника света

$$\tilde{E}_0(\vec{r}_0) = A_0 \frac{e^{ikr_0}}{r_0}$$

и получим

$$\tilde{E}_0(0) = \tilde{E}_P = \frac{A_0}{4\pi} \cdot \oint_S \left(\frac{e^{ikr_0}}{r_0} \cdot \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) - \frac{e^{ikr}}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr_0}}{r_0}\right) \right) \cdot dS.$$

Функция $\dfrac{e^{ikr}}{r}$ зависит только от r, поэтому градиент этой функции направлен вдоль вектора $\vec{r}$, и длина градиента равна модулю производной от функции по r. Производная от функции по любому другому направлению может быть выражена через производную по r, умноженную на косинус угла между $\vec{r}$ и направлением дифференцирования. В нашем случае направление дифференцирования $\vec{n}$ — это направление внутренней нормали к поверхности S. Рассмотрим этот косинус

$$\cos(\vec{n},\vec{r}) = -\cos(\vec{n},-\vec{r}) = -\cos(\alpha)$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) = \frac{d}{dr}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\cdot\left(-\cos(\alpha)\right) = \left(ik\frac{e^{ikr}}{r} - \frac{1}{r^2}e^{ikr}\right)\cdot\left(-\cos(\alpha)\right).$$

В последнем равенстве подставлена производная от произведения e^{ikr} на $\frac{1}{r}$. Длина волны мала по сравнению с любыми расстояниями. Тогда

$$r >> \lambda \qquad => \qquad \frac{1}{r} << k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad => \qquad \frac{1}{r^2} << \frac{k}{r}.$$

Следовательно, второе слагаемое в выражении производной по нормали можно отбросить. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) \approx -ik\frac{e^{ikr}}{r}\cos(\alpha).$$

Аналогично

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr_0}}{r_0}\right) = \frac{d}{dr_0}\left(\frac{e^{ikr_0}}{r_0}\right)\cdot\cos\left(\widehat{\vec{n},\vec{r}_0}\right) =$$

$$= \frac{d}{dr_0}\left(\frac{e^{ikr_0}}{r_0}\right)\cdot\cos(\alpha_0) = \left(ik\frac{e^{ikr_0}}{r_0} - \frac{1}{r_0^2}e^{ikr_0}\right)\cdot\cos(\alpha_0).$$

С учетом $r_0 >> \lambda$ можно отбросить второе слагаемое и получить

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr_0}}{r_0}\right) \approx ik\frac{e^{ikr_0}}{r_0}\cdot\cos(\alpha_0).$$

Подставим выражения производных по нормали $\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) \approx -ik\frac{e^{ikr}}{r}\cos(\alpha)$ и $\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr_0}}{r_0}\right) \approx ik\frac{e^{ikr_0}}{r_0}\cdot\cos(\alpha_0)$ в интеграл по поверхности S и получим:

$$\tilde{E}_P = \frac{A_0}{4\pi}\cdot\oint_S\left(\frac{e^{ikr_0}}{r_0}\cdot\left(-ik\frac{e^{ikr}}{r}\cos(\alpha)\right) - \frac{e^{ikr}}{r}\cdot\left(ik\frac{e^{ikr_0}}{r_0}\cdot\cos(\alpha_0)\right)\right)\cdot dS =$$

$$= -\frac{A_0}{4\pi}\cdot\oint_S\left(\frac{e^{ikr_0}}{r_0}\cdot ik\frac{e^{ikr}}{r}\cos(\alpha) + \frac{e^{ikr}}{r}\cdot ik\frac{e^{ikr_0}}{r_0}\cdot\cos(\alpha_0)\right)\cdot dS$$

$$= -\frac{A_0 ik}{4\pi}\cdot\oint_S\frac{e^{ikr_0}}{r_0}\frac{e^{ikr}}{r}\left(\cos(\alpha) + \cos(\alpha_0)\right)dS.$$

В этом выражении заменим обратно сферически симметричную волну точечного источника $A_0 \frac{e^{ikr_0}}{r_0}$ на $\tilde{E}_0(\vec{r}_0)$. И будем считать, что поле с амплитудой $\tilde{E}_0(\vec{r}_0)$ не обязательно создано точечным источником. Это можно сделать, если считать, что любое световое поле с любым распределением амплитуды $\tilde{E}_0(\vec{r}_0)$ можно представить, как совокупность излучений $A_0 \frac{e^{ikr_0}}{r_0}$ точечных источников. Строго говоря, это не справедливо, хотя бы потому, что вместо сферически симметричного излучения точечного источника логичнее рассматривать излучение точечного электрического диполя. Тем не менее, вслед за Кирхгофом получим

$$\tilde{E}_P = -\frac{ik}{4\pi} \oint_S \tilde{E}_0(\vec{r}) \frac{e^{ikr}}{r} \left(\cos(\alpha) + \cos(\alpha_0)\right) dS .$$

Подставим сюда $\frac{k}{4\pi} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{1}{2\lambda}$ и получим окончательное выражение

$$\tilde{E}_P = -\frac{i}{2\lambda} \oint_S \tilde{E}_0(\vec{r}) \frac{e^{ikr}}{r} \left(\cos(\alpha_0) + \cos(\alpha)\right) dS . \quad (4)$$

Эта формула представляет поле в точке наблюдения P, как сумму полей вторичных источников света, расположенных на поверхности S замкнутой вокруг точки наблюдения P.

Проанализируем амплитуду излучения каждого вторичного источника света в точке наблюдения P.

Амплитуда пропорциональна площади излучающей площадки dS, комплексной амплитуде поля $\tilde{E}_0(\vec{r})$ в точке вторичного источника и обратно пропорциональна $\sim \frac{1}{r}$ расстоянию r от вторичного источника до точки наблюдения P. Зависимость амплитуды от расстояния вида $\sim \frac{1}{r}$ хорошо согласуется с тем фактом, что через любую сферу проходит одинаковая энергия, тогда интенсивность спадает с расстоянием обратно пропорционально площади сферы $\sim \frac{1}{r^2}$, а амплитуда ведет себя, как корень из интенсивности $\sim \frac{1}{r}$. Амплитуда в точке P имеет фазовый множитель e^{ikr}, который определяется запаздыванием фазы на величину $kr = 2\pi \frac{r}{\lambda}$ в точке наблюдения относительно фазы вторичного источника. Кроме того, амплитуда вторичного источника пропорциональна сомножителю

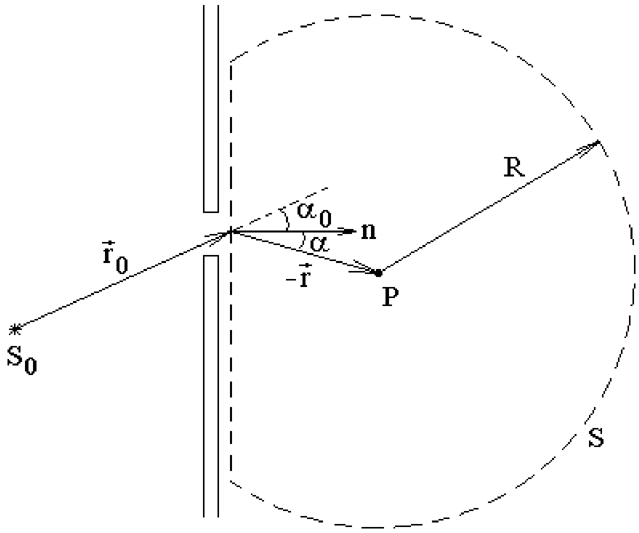
$$-\frac{i}{2\lambda}\cdot\left(\cos\left(\alpha_0\right)+\cos\left(\alpha\right)\right),$$

который называют коэффициентом наклона. Коэффициент наклона описывает зависимость излучательной способности вторичного источника света от направления волны пришедшей ко вторичному источнику и от направления волны ушедшей от вторичного источника.

Заметим, что вторичный источник света не излучает строго назад, то есть при условии

$\alpha_0+\alpha=\pi$ получаем $\cos\left(\alpha_0\right)+\cos\left(\alpha\right)=0$

Экзамен. Применение теории Кирхгофа к дифракции света на отверстии в непрозрачном плоском экране.



$$\tilde{E}_P=-\frac{i}{2\lambda}\oint_S\tilde{E}_0\left(\vec{r}\right)\cdot\frac{e^{ikr}}{r}\cdot\left(\cos\left(\alpha_0\right)+\cos\left(\alpha\right)\right)\cdot dS$$

В качестве охватывающей точку наблюдения P поверхности S выберем сферу с радиусом R и центром в точке P. Часть сферы, которая находится до экрана, с другой стороны экрана от точки наблюдения, заменим плоскостью, расположенной вплотную к экрану со стороны точки наблюдения P.

Мысленно разобьем поверхность S на три части:

$S=S_1+S_2+S_3$, где

S_1 — поверхность оставшейся справа от экрана части сферы,

S_2 — плоская поверхность, примыкающая непосредственно к экрану,

S_3 — поверхность отверстия в экране.

Согласно Кирхгофу интеграл нужно брать только по поверхности S_3, так как оба других интеграла стремятся к нулю, по крайней мере, при стремлении радиуса сферы R к бесконечности.

$\int\limits_{S_2}\rightarrow 0$, так как световое поле за непрозрачным экраном очень мало.

Факультативная вставка.

Сложнее показать, что $\int\limits_{S_1} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$. Это происходит только благодаря сомножителю в виде коэффициента наклона. И действительно, с одной стороны, на большом расстоянии R от отверстия амплитуда $\tilde{E}_0$ поля вторичных источников на поверхности сферы спадает с расстоянием $\tilde{E}_0 \sim \frac{1}{R}$, и сомножитель $\frac{e^{ikr}}{r}$ в подынтегральном выражении спадает, как $\sim \frac{1}{R}$, так как $r = R$, но с другой стороны, площадь поверхности сферы растет $S \sim R^2$. Поэтому, казалось бы, интеграл должен стремиться к константе. Этого не происходит из-за коэффициента наклона. Для большого радиуса сферы R свет приходит к поверхности сферы почти вдоль радиуса и излучается вторичным источником в точку P обратно вдоль радиуса сферы. Вторичный источник света назад не излучает, так как при излучении назад $\cos(\alpha_0) + \cos(\alpha) = 0$.

Конец факультативной вставки.

По теории Кирхгофа для дифракции на отверстии в плоском экране достаточно суммировать излучение вторичных источников только по поверхности отверстия по формуле

$$\tilde{E}_P = -\frac{i}{2\lambda}\int\limits_S \tilde{E}_0(\vec{r}) \cdot \frac{e^{ikr}}{r} \cdot \left(\cos(\alpha_0) + \cos(\alpha)\right) \cdot dS.$$

Здесь $\tilde{E}_0(\vec{r})$ — комплексная амплитуда светового поля в плоскости отверстия,

$\vec{r}$ —вектор из точки наблюдения P в точку вторичных источников на поверхности отверстия,

α_0 —угол между лучом, пришедшим к отверстию, и нормалью к экрану $\vec{n}$,

α — угол между нормалью к экрану $\vec{n}$ и направлением $(-\vec{r})$ от вторичного источника к точке наблюдения.

Заметим, что обычно оба угла α_0 и α — острые углы, так как $\vec{n}$ — нормаль к экрану в направлении распространения света.

Во многих практически важных случаях световая волна падает на экран перпендикулярно экрану. Тогда $\alpha_0 = 0$ => $\cos(\alpha_0) = 1$ =>

$-\frac{i}{2\lambda}\left(1 + \cos(\alpha)\right)$ — коэффициент наклона, при нормальном падении света на экран, α — угол поворота света на вторичном источнике.

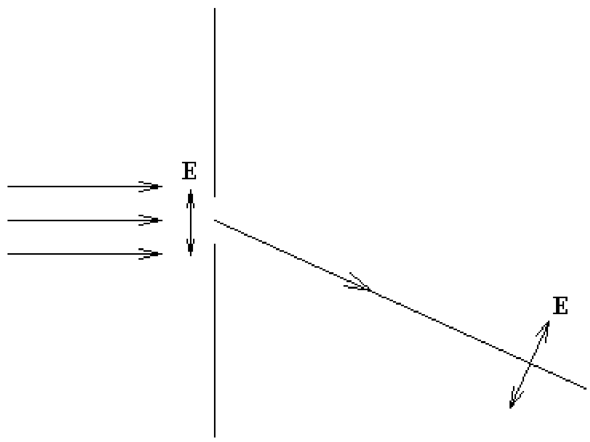
Кроме того, обычно считают, что источник света расположен далеко перед экраном, поэтому амплитуда поля в разных точках отверстия примерно одинаковая. Точка наблюдения обычно расположена далеко от отверстия в экране по сравнению с размерами отверстия. В таком случае подынтегральный множитель $\frac{1}{r}$ имеет примерно одинаковое значение для всех точек отверстия, поэтому его заменяют константой. Обычно рассматривают только малые углы дифракции. В таком случае $\alpha \approx 0$ и коэффициент наклона слабо зависит от угла дифракции $-\frac{i}{2\lambda}\left(1+\cos(\alpha)\right) \approx const$. В результате, во многих случаях интеграл Кирхгофа по площади отверстия рассматривают в упрощенном виде

$$\tilde{E}_P \sim \int_S E_0 e^{ikr} dS,$$

где r — расстояние от вторичного источника света в плоскости отверстия до точки наблюдения, в которой нужно рассчитать амплитуду света.

Факультативно. Трудности теории дифракции Кирхгофа.

Пусть свет падает перпендикулярно отверстию, и свет имеет линейную поляризацию в плоскости рисунка.



В падающем на экран свете нет горизонтальной составляющей напряженности поля *E*, так как световое поле поперечно. Свет, ушедший далеко от отверстия вправо, тоже должен быть поперечен. Поэтому в дифрагированном свете должна появиться горизонтальная составляющая поля *E*.

Это с одной стороны, а с другой стороны для каждой проекции поля *E* можно применить интеграл Кирхгофа.

Применим интеграл Кирхгофа для горизонтальной составляющей поля *E*. В падающей волне нет горизонтальной составляющей поля *E*, тогда ей неоткуда появиться и в дифрагированной волне, которую можно найти, как интеграл Кирхгофа по плоскости отверстия.

Дело в том, что теория дифракции Кирхгофа не обеспечивает ортогональность световых волн. Она и не могла обеспечивать, потому что она выведена из волнового уравнения, а не из уравнений Максвелла. Кроме того при выводе формулы Кирхгофа рассматривался невозможный для поперечных волн точечный источник света $\tilde{E}_0\left(\vec{r}_0\right) = A_0 \dfrac{e^{ikr_0}}{r_0}$.

Трудности теории Кирхгофа связаны с тем, что в теории не учитывается характер взаимодействия светового поля с экраном. Видимо, нельзя пренебречь излучением края отверстия и излучением от задней стенки экрана.

Факультативно. Формулы Стрэттона — Чу.

В строгой теории дифракции векторных электромагнитных полей получается формула Стрэттона — Чу. Эту теорию можно найти в книге: А. Дж. Стрэттон. Теория электромагнетизма. М.; Л.: ОГИЗ, 1948, на стр.410 формулы (19, 20). Несколько в более простом и понятном изложении формулу Стрэттона — Чу можно найти, например, в книге В.П. Якубов. Электродинамика. 2006. Томск, на стр.83 формула (3.10).

Если в объеме, который охватывает поверхность, нет источников поля, то в системе СГС Гаусса

$$\tilde{\tilde{E}}_P = \frac{1}{4\pi}\oint\limits_S \left\{ i\frac{\omega}{c}\mu\left[\vec{n},\tilde{\tilde{H}}\right]\frac{e^{ikr}}{r} + \left[\left[\vec{n},\tilde{\tilde{E}}\right],\overrightarrow{grad}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\right] + \left(\vec{n},\tilde{\tilde{E}}\right)\overrightarrow{grad}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\right\} dS,$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор внутренней нормали поверхности, μ — магнитная проницаемость среды, если она отлична от единицы. Здесь каждое из трех слагаемых под интегралом можно рассматривать, как излучение некоторых вторичных источников света, расположенных на поверхности: $\left[\vec{n},\tilde{\tilde{H}}\right] = \dfrac{4\pi}{c}\tilde{\tilde{i}}$, где $\tilde{\tilde{i}}$ — плотность поверхностных токов; $\left[\vec{n},\tilde{\tilde{E}}\right] = -\dfrac{4\pi}{c}\tilde{\tilde{i}}_m$, где $\tilde{\tilde{i}}_m$ — плотность поверхностных токов магнитных зарядов, которых на самом деле не бывает; $\left(\vec{n},\tilde{\tilde{E}}\right) = \dfrac{4\pi\tilde{\sigma}}{\varepsilon}$, где $\tilde{\sigma}$ — поверхностная плотность свободных зарядов, ε — диэлектрическая проницаемость среды, если она отлична от единицы.

$$\tilde{\tilde{H}}_P = \frac{1}{4\pi}\oint\limits_S \left\{ i\frac{\omega}{c}\varepsilon\left[\vec{n},\tilde{\tilde{E}}\right]\frac{e^{ikr}}{r} - \left[\left[\vec{n},\tilde{\tilde{H}}\right],\overrightarrow{grad}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\right] - \left(\vec{n},\tilde{\tilde{H}}\right)\overrightarrow{grad}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\right\} dS,$$

где $\left(\vec{n},\tilde{\tilde{H}}\right) = \dfrac{4\pi\tilde{\sigma}_m}{\mu}$ и $\tilde{\sigma}_m$ — поверхностная плотность магнитных зарядов, которых на самом деле не бывает.

В системе СИ:

$$\tilde{\tilde{E}}_P = \frac{1}{4\pi}\oint\limits_S \left\{ i\omega\mu_0\mu\left[\vec{n},\tilde{\tilde{H}}\right]\frac{e^{ikr}}{r} + \left[\left[\vec{n},\tilde{\tilde{E}}\right],\overrightarrow{grad}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\right] + \left(\vec{n},\tilde{\tilde{E}}\right)\overrightarrow{grad}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\right\} dS,$$

$$\tilde{\tilde{H}}_P = \frac{1}{4\pi}\oint\limits_S \left\{ i\omega\varepsilon_0\varepsilon\left[\vec{n},\tilde{\tilde{E}}\right]\frac{e^{ikr}}{r} - \left[\left[\vec{n},\tilde{\tilde{H}}\right],\overrightarrow{grad}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\right] - \left(\vec{n},\tilde{\tilde{H}}\right)\overrightarrow{grad}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\right\} dS,$$

$$\left[\vec{n},\tilde{\vec{H}}\right]=\tilde{\vec{i}}\,,\qquad \left[\vec{n},\tilde{\vec{E}}\right]=-\tilde{\vec{i}}_m\,,\qquad \left(\vec{n},\tilde{\vec{E}}\right)=\frac{\tilde{\sigma}}{\varepsilon_0\varepsilon}\,,\qquad \left(\vec{n},\tilde{\vec{H}}\right)=\frac{\tilde{\sigma}_m}{\mu_0\mu}\,.$$

<u>Совсем факультативная вставка (мои непроверенные соображения).</u>

Если рассмотреть линейно поляризованный свет, который нормально падает на плоский непрозрачный экран с отверстием, то, интегрируя вторичные источники формулы Стрэттона — Чу только по поверхности отверстия, получим, что при дифракции под углом к нормали экрана поле не будет поперечным. Дело в том, что по краю отверстия должны быть еще некоторые вторичные источники света. Например, если на поверхности отверстия есть вторичные источники света в виде поверхностного тока, то этот ток, упираясь в границу отверстия должен создавать на этой границе линейный заряд. Плотность поверхностного тока осциллирует с частотой света, и линейная плотность заряда на границе отверстия должна осциллировать с частотой света и излучать. Появляется излучение края отверстия.

На линии, которая является границей отверстия в непрозрачном экране, должны выполняться граничные условия аналогичные граничным условиям на поверхностной границе. Будем рассматривать только проекцию электрического и магнитного поля на поверхность отверстия. Если электрическое поле в плоскости отверстия имеет нормальную к границе отверстия составляющую, то на границе появляется линейный электрический заряд λ. Если магнитное — линейный магнитный заряд λ_m. Если магнитное поле в плоскости отверстия имеет тангенциальную составляющую к границе отверстия, то на границе появляется линейный ток электрических зарядов I (просто ток, как в тонком проводе). Если электрическое — ток магнитных зарядов I_m.

Обозначим за $\vec{\tau}$ — единичный вектор по внутренней нормали к границе отверстия и в плоскости отверстия. Тогда $\tilde{E}_{\tau n}=\left(\vec{\tau},\left[\vec{n},\tilde{\vec{E}}\right]\right)=\frac{4\pi\omega\lambda}{\varepsilon c}$, $\tilde{H}_{\tau n}=\left(\vec{\tau},\left[\vec{n},\tilde{\vec{H}}\right]\right)=\frac{4\pi\omega\lambda_m}{\varepsilon c}$, $\tilde{H}_{\tau\tau}=\left[\vec{\tau},\left[\vec{n},\tilde{\vec{H}}\right]\right]=\frac{4\pi\omega}{c^2}I$, $\tilde{E}_{\tau\tau}=\left[\vec{\tau},\left[\vec{n},\tilde{\vec{E}}\right]\right]=\frac{4\pi\omega}{c^2}I_m$.

Тогда к интегралу Стрэттона — Чу по поверхности отверстия

$$\tilde{\vec{E}}_P=\frac{1}{4\pi}\int\limits_S\left\{i\frac{\omega}{c}\mu\left[\vec{n},\tilde{\vec{H}}\right]\frac{e^{ikr}}{r}+\left[\left[\vec{n},\tilde{\vec{E}}\right],\overrightarrow{grad}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\right]+\left(\vec{n},\tilde{\vec{E}}\right)\overrightarrow{grad}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\right\}dS$$

нужно добавить интеграл по краю отверстия

$$\frac{1}{4\pi}\oint\limits_l\left\{i\mu\left[\vec{\tau},\left[\vec{n},\tilde{\vec{H}}\right]\right]\frac{e^{ikr}}{r}+\frac{c}{\omega}\left[\left[\vec{\tau},\left[\vec{n},\tilde{\vec{E}}\right]\right],\overrightarrow{grad}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\right]+\frac{c}{\omega}\left(\vec{\tau},\left[\vec{n},\tilde{\vec{E}}\right]\right)\overrightarrow{grad}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\right\}dl$$

(нужно еще проверить знаки и коэффициенты на соответствие принципу перестановочной двойственности, на соответствие поперечности поля и на соответствие равенству $\sqrt{\varepsilon}E=\sqrt{\mu}H$ на примере прямоугольного отверстия и нормального падения света линейной поляризации).

Аналогично к интегралу

$$\tilde{\tilde{\vec{H}}}_P = \frac{1}{4\pi}\oint\limits_S \left\{ i\frac{\omega}{c}\varepsilon\left[\vec{n},\tilde{\tilde{\vec{E}}}\right]\frac{e^{ikr}}{r} - \left[\left[\vec{n},\tilde{\tilde{\vec{H}}}\right],\overrightarrow{grad}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\right] - \left(\vec{n},\tilde{\tilde{\vec{H}}}\right)\overrightarrow{grad}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\right\} dS$$

нужно добавить интеграл

$$\frac{1}{4\pi}\oint\limits_l \left\{ i\varepsilon\left[\vec{\tau},\left[\vec{n},\tilde{\tilde{\vec{E}}}\right]\right]\frac{e^{ikr}}{r} - \frac{c}{\omega}\left[\left[\vec{\tau},\left[\vec{n},\tilde{\tilde{\vec{H}}}\right]\right],\overrightarrow{grad}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\right] - \frac{c}{\omega}\left(\vec{\tau},\left[\vec{n},\tilde{\tilde{\vec{H}}}\right]\right)\overrightarrow{grad}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\right\} dl$$

<u>Конец совсем факультативной вставки.</u>